

Тождественные преобразования числовых и буквенных выражений

1. Тождественное преобразование в математике.

Тождественное преобразование в математике понимается как:

- замена одного аналитического выражения другим, тождественно ему равным, но отличным по форме;
- преобразование (отображение в себя) некоторого множества, оставляющее на месте каждый его элемент.

В школьном курсе алгебры тождественные преобразования рассматриваются в первом смысле, то есть как замена одного аналитического выражения другим, тождественно ему равным.

Знак « \equiv » для обозначения тождества был введен Б. Риманом (немецким математиком, учеником К. Гаусса) в 1857 году.

Выражение в смысле математического языка (в широком смысле и в алгебре) – конечная (но не всякая) последовательность символов из его алфавита. Семантический подход выделяет выражения как конечные последовательности символов алфавита, имеющие смысл. Синтаксический подход – это понимание выражения как последовательности символов, построенные по определенным правилам.

Среди выражений выделяют:

- выражение без переменных:
 - термы (не содержащее знака отношения и обозначающее число);
 - формулы (содержащее один из знаков отношений – высказывание);
- выражение с переменными:
 - термы (числовая форма, выражающая числовую функцию числовой переменной, например $15-x$);

- формулы (высказывательная форма, выражающая логическую функцию числовой переменной – предикат, например из $A=\{1,2,3\}$ в $\{И,Л\}$, $7+x=10$).

В школе к выражениям преимущественно относят: термы, не содержащие знака отношения и обозначающие числа – арифметические выражения; числовые формы, выражающие числовые функции числовых переменных. Тождественные преобразования используются для замены одного выражения другим и при доказательстве равенства выражений на основе свойства транзитивности.

Существует несколько подходов к определению тождества, тождественно равных выражений.

Во-первых, тождество рассматривается как равенство, верное при любых значениях переменных. Этому определению удовлетворяют целые рациональные выражения, но равенства с радикалами ($\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ и ему подобные) при таком подходе уже не являются тождествами.

Тождественно равными выражениями называются два выражения, соответственные значения которых равны при любых значениях переменных.

Во-вторых, тождество рассматривается как равенство, верное при любых допустимых значениях переменных. (Такое определение понятия тождества предлагается в 7 классе в учебнике алгебры под редакцией А.Г. Мордковича). Два алгебраических выражения называются тождественными, если они принимают равные числовые значения при соответственно равных значениях букв из общей части областей определения.

В-третьих, тождество рассматривается на некотором множестве как равенство, верное для любых значений переменных из данного множества. Это множество является подмножеством общей области определения выражений, стоящих в левой и правой частях равенства.

Определение тождественно равных выражений позволяет рассмотреть понятие тождественного преобразования в алгебре. Замену одного

выражения другим, тождественно равным ему, называют тождественным преобразованием.

В вышеприведенных трактовках отражены две точки зрения на тождественность алгебраических выражений и тождественное преобразование: формальная и функциональная. С формальной точки зрения два выражения тождественны, если они могут быть получены друг из друга путем формальных преобразований. С функциональной точки зрения два выражения тождественны, если они принимают одни и те же числовые значения при произвольных системах значений букв, входящих в эти выражения.

Овладение учащимися материалами линии «Тождественные преобразования» состоит в следующем:

- ученики должны понимать, что в алгебре все действия только обозначаются, а затем преобразуются в более простые заменой суммы, произведения и т.п. на тождественно равное выражение;
- тождественные преобразования – не самоцель, они используются для удобства нахождения числовых значений выражений, решения уравнений, доказательства неравенств и выявления свойств функций.

Это значит, что с тождественными преобразованиями связаны все линии курса алгебры. Поэтому тождественные преобразования – одна из основных линий курса алгебры и начал анализа школьной математики.

Изучение этой линии выполняет различные функции.

Теоретический аппарат служит средством построения теории других линий, таких, как «Уравнения, неравенства и их системы», «Функция» и др. Операционный аппарат является практической базой решения математических и прикладных задач. Школьный курс математики выделяет два основных класса математических выражений: алгебраические (выражения, составленные из конечного числа букв или цифр, соединенные знаками действий, порядок действий может определяться и скобками; арифметические выражения – частный вид выражений, не включающих

букв) и трансцендентные (аналитические выражения, не являющиеся алгебраическими).

Основная теория тождественных преобразований изложена на множестве алгебраических выражений. Далее при введении трансцендентных функций расширяется область применения тождественных преобразований и свойства введенных функций выделяют особенности преобразований неалгебраических выражений.

2. Основные виды тождественных преобразований.

Виды тождественных преобразований находят свое отражение в способах преобразования выражений. Рассмотрим их.

Тождественные преобразования целых алгебраических выражений:

- 1) приведение подобных членов:
 - переместительное свойство;
 - распределительное свойство;
- 2) сложение, вычитание, умножение, деление многочленов – свойства степеней с целыми показателями;
- 3) разложение многочленов на множители с помощью:
 - вынесения общего множителя за скобки;
 - выделения полного квадрата;
 - представления слагаемых в виде суммы или разности других слагаемых;
 - группировки;
 - формул сокращенного умножения;
 - разложения квадратного трехчлена на множители;
 - найденных корней (через подбор, теорему Безу, схему Горнера);
- 4) прибавление выражения, тождественно равного нулю.

Тождественные преобразования рациональных алгебраических выражений:

- 1) приведение алгебраических дробей к общему знаменателю;

2) сложение, вычитание, умножение и деление дробей – почленное деление каждого слагаемого делимого на делитель с целью выделения целой части;

3) умножение на выражение, тождественно равное единице;

4) тождественные преобразования целых алгебраических выражений.

Тождественные преобразования иррациональных алгебраических выражений:

1) избавление от иррациональности в знаменателе;

2) тождественные преобразования рациональных алгебраических выражений.

3. Основные типы преобразований и этапы их изучения в основной школе.

Линия тождественных преобразований и уровень строгости ее изложения в школьных учебниках реализуется по-разному.

Понятие тождества. В одних учебниках вводятся последовательно все три определения тождества. Их появление связано с расширением множества чисел, на котором рассматриваются тождества.

Независимо от введения понятия тождества фактически во всех учебниках рассматриваются определенные типы преобразований и реализуются этапы их изучения.

Перечислим основные этапы изучения преобразований и типы рассматриваемых преобразований.

Пропедевтический этап. Простейшие преобразования, опираются на свойства арифметических операций (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность), производятся в начальной школе и в 5-6 классах. Также преобразования могут осуществляться на основе связи между компонентами и результатом действия.

Первый этап. Используется нерасчлененная система преобразований, которая представлена правилами выполнения действий над одной или обеими частями равенства в начале курса алгебры.

Пример 1. Решить уравнение $4(5x-12)=6x+15$.

Пример 2. Доказать, что значение выражения $13(2y-3)-(2x+26y)-2(4-x)$ не зависит от значения входящих в него переменных.

Цель этого этапа – достичь беглости при решении основных типов задач по линиям числа, уравнений, тождественных преобразований рациональных выражений (7 класс).

Этап охватывает следующие темы: *сложение и вычитание, умножение одночленов и многочленов* (первые преобразования – приведение одночленов к каноническому виду на основе переместительного (коммутативного) и сочетательного (ассоциативного) свойств умножения; *формулы сокращенного умножения*).

Второй этап. Выделение конкретных видов преобразований и формирование умений и навыков их применения (7-8 классы). Этого требует расширение области применения тождественных преобразований (фактически курс алгебры и начал анализа). Преобразования дробно-рациональных, иррациональных, трансцендентных выражений. Причем здесь целесообразно выделить два класса преобразований: тождественные преобразования (преобразование выражений) и равносильные преобразования (преобразования формул).

Третий этап. Организация целостной системы преобразований (10-11 классы).

Основная цель этого этапа состоит в формировании гибкого и мощного аппарата, являющегося средством решения задач различного уровня.

Библиографический список литературы:

1. Методика обучения математике. В 2 ч. Часть 1 : учебник для академического бакалавриата / под ред. Н.С. Подходовой, В.И. Снегуровой. – М.: Издательство Юрайт, 2017. –274 с.

2. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика : Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ. -мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В. И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. –416 с.