Кулешова Ирина Геннадьевна
к.п.н., доцент кафедры математики и
методики обучения математике АлтГПУ

Технология организации усвоения математических понятий и теорем

С точки зрения формальной логики понятие – это мысль, фиксирующая признаки отображаемых в ней предметов и явлений, позволяющих отличить эти предметы и явления от смежных с ними.

Математические понятия, по выражению Ф. Энгельса, отражают в мозгу человека пространственные формы и количественные отношения действительного мира. Математические понятия, в отличие от понятий других наук, отличаются высокой степенью абстракции и обобщения, с развитием науки они развиваются, изменяются и совершенствуются.

Дадим определения свойства и признака, используя логико-математическую терминологию.

Суждение A, высказанное относительно объекта x, называется признаком понятия $P\ (x)$, если истинно высказывание $\mathrm{A}(x) \Rightarrow P(x)$. Здесь P есть термин (название) данного понятия, а $P(x)$ означает «x есть P». Таким образом, суждение является *признаком* понятия, когда вследствие его выполнения для объекта x, данный объект можно назвать термином P.

Пример 1: Суждение «диагонали параллелограмма перпендикулярны» – *признак ромба,* так как если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то такой параллелограмм является ромбом – истинное утверждение.

Суждение A, высказанное относительно объекта x, называется свойством понятия $P(x)$, если истинно высказывание $\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{A}(x)$. Иначе: суждение A называется свойством понятия P тогда и только тогда, когда без A(x) нет и P(x).

Пример 2: Суждение «противоположные стороны параллелограмма попарно равны» является свойством параллелограмма, так как если у четырёхугольника найдется пара противоположных сторон, которые не равны, то такой четырехугольник не будет параллелограммом.

Если суждение одновременно является свойством и признаком понятия, то его называют *критерием понятия.* Деление диагоналей четырёхугольника точкой пересечения пополам является критерием параллелограмма.

Всякое понятие имеет две логические характеристики: содержание и объем.

Содержанием понятия называется совокупность существенных, взаимосвязанных признаков (свойств) объекта. Объемом понятия называется совокупность объектов, обозначаемых одним и тем же термином (названием).

Например, термин (название) – *трапеция.*

Содержание понятия: 1) четырехугольник, 2) одна пара противолежащих сторон параллельна, 3) другая пара противолежащих сторон не параллельна, 4) сумма углов, прилежащих к боковой стороне равна 180°.

Объем понятия – все мыслимые трапеции.

Между содержанием понятия и объемом существует следующая связь: чем больше объем понятия, тем меньше его содержание, и наоборот. Так, например, объем понятия «равнобедренный треугольник» меньше объема понятия «треугольник». А содержание первого понятия больше содержания второго, ибо равнобедренный треугольник обладает не только всеми свойствами треугольника, но и особыми свойствами присущими только равнобедренным треугольникам (боковые стороны равны, углы при основании равны). Итак, если увеличить содержание, то уменьшится объем понятия.

Если объем одного понятия входит как часть в объем другого понятия, то первое понятие называют видовым, а второе родовым. Например, ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны. Ромб – видовое, параллелограмм – родовое. Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны. Квадрат – видовое, прямоугольник – родовое. Но, квадрат –

это ромб, у которого угол прямой. То есть понятие рода и вида относительны.

Если с содержанием понятия связано определение, то с объемом связана классификация.

Классификация – это распределение объектов какого-либо понятия на взаимосвязанные классы (виды, типы) по наиболее существенным признакам (свойствам). Признак (свойство), по которому происходит классификация (деление) понятия на виды (классы), называется основанием классификации.

Основные этапы формирования математического понятия.

I. Введение может осуществляться двумя путями:

а) конкретно-индуктивный – все признаки понятия рассматриваются на примерах или задачах, после чего вводится термин и определение;

б) абстрактно-дедуктивным – сразу дается определение, а потом на примерах обрабатываются признаки.

II. Усвоение.

Здесь прослеживаются две цели: 1) Выучить определение. 2) Научить учащихся определять подходит ли объект под рассматриваемые понятия или нет. Этот этап осуществляется на специально составленных упражнениях. Для реализации второй цели необходимо:1) указывать систему необходимых и достаточных свойств объектов данного класса; 2) установить, обладает данный объект выделенными свойствами или нет; 3) заключить о принадлежности объекта к данному понятию.

III. Закрепление – решение более сложных задач, включающих рассматриваемые понятия.

Важнейшими видами сложных суждений являются аксиомы и теоремы. Аксиома – математическое предложение, которое принимается без доказательства в рамках данной теории.

В школе термину «теорема» чаще всего даётся такое разъяснение: «Теорема – математическое предложение, истинность которого устанавливается путем рассуждений». Из такой трактовки следует, что под теоремой в ШКМ понимается высказывание, которое всегда является истинным.

К основным теоремам ШКМ обычно относят следующие виды: импликативные теоремы; теоремы общего вида; теоремы существования и единственности.

Импликативной теоремой называется теорема вида: $(\forall x \in M)\ (A(x) \rightarrow B(x))$. Читается: «Для любого x из множества M: если A(x), то B(x)». Пример. Если сумма цифр числа T делится на 3, то и само число T делится на 3. В структуре импликативной теоремы $(\forall x \in M)$ – разъяснительная часть, A(x) – условие или посылка теоремы, B(x) – заключение или требование теоремы.

Методы доказательства импликативных теорем: прямое доказательство и метод от противного.

*Теоремы общего вида (*или в форме утвердительного предложения) символически записывается так: $(\forall x \in M)\ A(x)$; читается: «Каждый элемент множества M обладает свойством A».

Пример: Сумма углов треугольника равна 180 градусам. Разъяснительная часть теоремы: $(\forall x \in M)$, A(x) – требование теоремы. В школьной практике для усвоения таких теорем или их доказательства целесообразно их формулировать в импликативной форме. Доказательство теорем общего вида проводится аналогично доказательству теорем импликативного вида.

Частным случаем теорем общего вида являются формулы.

Теоремы существования и единственности.

Структура теоремы существования $(\exists x \in M)\ A(x)$. Для доказательства такой теоремы достаточно привести пример из множества M, для которого A(x) истинно.

Теоремы единственности тесно связаны с теоремами существования и в них требуется доказать единственность элемента x из множества M, обладающего свойством A.

Запись теоремы существования и единственности в символах:

$(\exists x \in M)(A(x) \wedge (\forall y))(A(y) \rightarrow (x=y)))$

Основу любого доказательства составляют рассуждения. Рассуждения подразделяются на индуктивные и дедуктивные.

Дедуктивным называют рассуждение, которое проводится по особым логическим схемам, называемым правилами вывода, в результате которого из истинных посылок получится верный вывод (метод от общего к частному).

Неполная индукция – метод рассуждений, в результате которого делается вывод, что все объекты обладают некоторым свойством только на том основании, что некоторые объекты данной совокупности обладают этим свойством.

Полная индукция **(**от частного к общему**)** – (метод перебора) метод рассуждений, при котором на основании того, что каждый объект совокупности обладает некоторым свойством, делается вывод, что все объекты данной совокупности обладают указанным свойством.

Этапы организации изучения теорем.

Процесс изучения теоремы включает следующие этапы:

1) актуализация знаний, необходимых для усвоения теоремы;

2) мотивация изучения теоремы; постановка цели изучения теоремы;

3) ознакомление с формулировкой теоремы и выяснение смысла каждого слова в формулировке теоремы и смысла всей теоремы;

4) выявление структуры теоремы, краткая запись теоремы;

5)поиск доказательства теоремы; составление плана доказательства;

6) запись доказательства теоремы;

7) формирование умений по применению теоремы;

8) установление связей теоремы с ранее изученными теоремами, возможные обобщения теоремы.

В ШКМ основной целью изучения теорем является продолжение процесса формирования математического понятия, изучения его новых свойств. Некоторые теоремы служат обоснованием изучаемых далее алгоритмов (теорема о корнях квадратного уравнения). Первые теоремы в геометрии служат формированию потребности в обосновании математических фактов, в выработке умений дедуктивных рассуждений. Порой учитель использует теоремы для развития интеллектуальных качеств личности, предлагая самим найти способ доказательства.

Мотивация изучения теоремы может осуществляться через: обращение к жизненному опыту обучающегося; использование исторического материала; постановку проблемы, которая будет решена при доказательстве теоремы; использование моделей, графиков; проведение лабораторных или практических работ.

Третий и четвёртый этапы при работе с теоремой чаще всего представляет собой диалог, который организуется с помощью вопросов: О каких математических объектах говорится в условии теоремы? Какими отношениями связаны указанные объекты? Выделите условие теоремы, заключение теоремы. Сделайте рисунок (чертёж) к теореме. Какие данные нужно нанести на чертёж? Выполните краткую запись теоремы на доске.

Поиск доказательства – процесс творческий. Часто используются эвристики, анализ и синтез, опора на известные способы доказательства.

Доказательство теоремы. Оно может проводиться учителем, наиболее подготовленными учащимися; организовываться как работа с учебником, может быть задано на дом.

Запись доказательства теоремы должна соответствовать структуре, должны быть выделены дедуктивные рассуждения.

Школьников следует специально обучать записи доказательства теоремы и использованию при записи знаково-символического языка.

Библиографический список литературы

1. Атанасян, Л.С. Геометрия 7 - 9 классы : учебник / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев [и др.] - Москва : Просвещение, 2019. – 384 с.

2. Дидактические основы математики в общем образовании : учебное пособие / Э.К. Брейтигам, И.В. Кисельников, И.Г. Кулешова, О.А. Тыщенко. – Барнаул : АлтГПУ, 2021. – 236с.
3. Методика обучения математике : учебник для академического бакалавриата. В 2 частях. Часть 1 / под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – Москва : Юрайт, 2017. – 274 с.
4. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике в средней школе : учебное пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов и университетов / Г. И. Саранцев. – Москва : Просвещение, 2002. – 223 с.