Кисельников Игорь Васильевич,

канд. пед. наук, доцент кафедры

математики и методики обучения математике

Параллельность и перпендикулярность прямых на плоскости. Треугольники. Свойства треугольников

Взаимное расположение прямых на плоскости

Аксиома. Через любые две точки плоскости можно провести прямую, и притом только одну.

Параллельные прямые

Определение. Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Аксиома параллельных прямых. Для каждой прямой а и не лежащей на ней точки А существует не более одной прямой, параллельной прямой а и проходящей через точку А.

Признаки параллельности двух прямых.

1. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то данные прямые параллельны.

2. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то данные прямые параллельны.

3. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, до данные прямые параллельны.

Свойства параллельных прямых.

1. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

2. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

3. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.

4. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Углы между прямыми. Перпендикулярные прямые.

Определение 1. Углом называется геометрическая фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из этой точки.

Лучи, образующие угол, называются сторонами угла, а их общее начало – вершиной угла.

Определение 2. Углом между пересекающимися прямыми называется меньший из углов, образованных при пересечении этих прямых.

Определение 3. Две пересекающиеся прямые называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°.

Теорема. Для всякой прямой а и любой точки А плоскости существует и притом единственная прямая, проходящая через точку А и перпендикулярная прямой а.

Треугольник

Определение. Треугольником называется геометрическая фигура, образованная тремя отрезками с попарно общими концами, не лежащими на одной прямой.

Отрезки, образующие треугольник, называются сторонами треугольника, а их общие концы – вершинами треугольника.

Треугольник с вершинами A, B, C обозначается ΔABC, углы $\angle ABC, \angle BAC$ и $\angle ACB$ называются углами треугольника ΔABC, а углы, смежные с углами $\angle ABC, \angle BAC$ и $\angle ACB$, называются внешними углами треугольника ABC.

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется *медианой* треугольника, отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется *биссектрисой* треугольника, перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону, называется *высотой* треугольника.

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника называется *средней линией* треугольника.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна одной из сторон треугольника и равна его половине.

Признаки равенства треугольников

Напомним, что две фигуры называются равными, если их можно совместить наложением.

Теорема 1 (первый признак равенства треугольников). Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 2 (второй признак равенства треугольников). Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 3 (первый признак равенства треугольников). Если три стороны и одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Замечание. Все соответствующие элементы равных треугольников (биссектрисы соответствующих углов; высоты, опущенные на соответствующие стороны; медианы, проведенные к соответствующим сторонам; радиусы вписанных и описанных окружностей и т.д.) равны.

Углы треугольника. Виды треугольников

Теорема 1. Сумма углов треугольника равна 180°.

Терема 2. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

Если все три угла треугольника острые, то треугольник называется остроугольным, если один из углов треугольника тупой, то треугольник называется тупоугольным, если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется прямоугольным. В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против прямого угла, называется гипотенузой, а две другие стороны называются катетами этого треугольника.

Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны. Равные стороны называются боковыми сторонами, а третья сторона – основанием равнобедренного треугольника.

Треугольник, все три стороны которого равны, называется равносторонним (правильным) треугольником.

Равнобедренный треугольник

1. $a = b \Leftrightarrow \angle A = \angle B$

2. $a = b \Leftrightarrow m_a = m_b$, $a = b \Leftrightarrow h_a = h_b$, $a = b \Leftrightarrow l_A = l_B$

3. $a = b \Rightarrow m_c = h_c = l_C$ и, обратно, $m_c = h_c \Rightarrow a = b$, $m_c = l_C \Rightarrow a = b$,

$$l_C = h_c \Rightarrow a = b$$

Признаки подобия треугольников

Напомним, что два треугольника подобны, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

Замечание. Говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

Стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ называют сходственными, если у этих треугольников соответственно равны углы: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Отношение сходственных сторон называется *коэффициентом подобия* этих треугольников.

Теорема 1 (первый признак подобия треугольников).

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Теорема 2 (второй признак подобия треугольников).

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Теорема 3 (третий признак подобия треугольников).

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Замечание. Отношение всех сходственных отрезков в подобных треугольниках (биссектрис соответствующих углов; высот, опущенных на сходственные стороны; медиан, проведенных к сходственным сторонам; радиусов вписанных и описанных окружностей и т.д.) равно коэффициенту подобия.

Теорема. Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые, отсекают на этих прямых пропорциональные отрезки.

Следствие. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла (стороны вертикальных углов), отсекают от него (них) подобные треугольники.

Площадь треугольника

1. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a h_a$

2. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} absinC$

3. $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 sinBsinC}{2\sin(B+C)}$

4. Формула Герона. $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

5. $S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$

6. $S_{\Delta ABC} = pr$

7. $S_{\Delta ABC} = (p-a)r_a$, где r_a– радиус окружности, вне вписанной к стороне ВС треугольника ΔABC.