Кисельников Игорь Васильевич,
канд. пед. наук, доцент кафедры
математики и методики обучения математике

Параллелограмм. Прямоугольник. Ромб. Квадрат. Трапеция. Окружность. Касательная к окружности. Касательные и хорды. Вписанные и описанные многоугольники.

Параллелограмм

Определение. Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

Из определения следует, что параллелограмм – *выпуклый четырехугольник.*

Характеристические свойства (свойства и признаки) параллелограмма.

1. Две противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны тогда и только тогда, когда этот четырехугольник – параллелограмм.

2. Противоположные стороны четырехугольника попарно равны тогда и только тогда, когда этот четырехугольник – параллелограмм.

3. Противоположные углы четырехугольника попарно равны тогда и только тогда, когда этот четырехугольник - параллелограмм.

4. Диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам тогда и только тогда, когда этот четырехугольник – параллелограмм.

5. Сумма квадратов диагоналей четырехугольника равна сумме квадратов его сторон тогда и только тогда, когда этот четырехугольник – параллелограмм.

Прямоугольник, ромб, квадрат

Определение. Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Так как прямоугольник, по определению, является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, прямоугольник обладает следующим *характеристическим свойством:*

Диагонали параллелограмма равны тогда и только тогда, когда этот параллелограмм – прямоугольник.

Определение. Ромбом называется параллелограмм, все стороны которого равны.

Так как ромб, по определению, является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, ромб обладает следующими *характеристическими свойствами:*

1. Диагонали параллелограмма делят его углы пополам тогда и только тогда, когда этот параллелограмм – ромб.

2. Диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда этот параллелограмм – ромб.

Определение. Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

Из определения следует, что квадрат является ромбом, следовательно, он обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Трапеция

Определение. Трапецией называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями,* а две другие стороны – *боковыми сторонами.* Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции называется *средней линией* трапеции.

Трапеция, боковые стороны которой равны, называется *равнобедренной* трапецией.

Трапеция, один из углов которой равен 90°, называется *прямоугольной* трапецией.

Свойство трапеции

1. Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.

Теорема Вариньона – геометрический факт, доказанный Пьером Вариньоном и утверждающий, что середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

Параллелограмм, образованный серединами сторон, иногда называется *вариньоновским* или *вариньоновым*.

Следствия из теоремы Вариньона:

- Центр параллелограмма Вариньона лежит на середине отрезка, соединяющего середины сторон исходного четырёхугольника (в этой же точке пересекаются отрезки, соединяющие середины противоположных сторон – диагонали вариньоновского параллелограмма).
- Периметр параллелограмма Вариньона равен сумме диагоналей исходного четырёхугольника.
- Площадь параллелограмма Вариньона равна половине площади исходного четырёхугольника.
- Для прямоугольника и равнобедренной трапеции параллелограммом Вариньона является ромб, а для ромба – прямоугольник.

- Параллелограмм Вариньона является ромбом тогда и только тогда, когда в исходном четырехугольнике 1) диагонали равны 2) бимедианы перпендикулярны.
- Параллелограмм Вариньона является прямоугольником тогда и только тогда, когда в исходном четырехугольнике: 1) диагонали перпендикулярны; 2) бимедианы равны.
- Параллелограмм Вариньона является квадратом тогда и только тогда, когда в исходном четырехугольнике 1) диагонали равны и перпендикулярны; 2) бимедианы равны и перпендикулярны.

Правильные многоугольники

Определение. *Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.*

Окружность

Определение. Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

Данная точка называется *центром* окружности, а отрезок, соединяющий центр с какой-нибудь точкой окружности (а также длина этого отрезка), называется *радиусом* окружности. Окружность с центром O и радиусом r будем обозначать $0(r)$.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой* окружности, а хорда, проходящая через центр – *диаметром* окружности.

Угол, вершиной которого является центр окружности, называется *центральным углом* этой окружности.

Любые две точки окружности делят её на две части, каждая из которых называется *дугой* окружности, а данные точки называются *концами* этих дуг.

Дуга с концами A и B обозначается так: $\cup AB$. Чтобы различать две дуги с концами A и B часто берется внутренняя точка на каждой из них, и дуги обозначаются тремя буквами: $\cup AMB; \cup AKB$.

Если дуга АВ окружности с центром О меньше или равна полуокружности, то за ее градусную (радианную) меру принимается градусная (радианная) мера центрального угла АОВ, если дуга АВ больше полуокружности, то ее градусную (радианную) меру считают равной $360°-\angle AOB$.

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется *кругом.* Центр, радиус и диаметр окружности, ограничивающей круг, называются также *центром, радиусом и диаметром круга.* Любые два радиуса делят круг на две части, каждая из которых называется *круговым сектором* или просто *сектором.* Дуга, ограничивающая сектор, называется *дугой сектора.* Любая хорда делит круг на две части, каждая из которых называется *круговым сегментом* или просто *сегментом.*

Теорема 1. Прямая, проходящая через конец радиуса, лежащий на окружности, перпендикулярна к этому радиусу тогда и только тогда, когда она является касательной к данной окружности.

Теорема 2. Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны.

Теорема 3. Центр окружности принадлежит биссектрисе угла, образованного отрезками касательных к этой окружности, проведенными из одной точки.

Вписанный угол

Определение. *Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом.*

Теорема. *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

Следствие 1. *Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны*.

Следствие 2. *Вписанный угол, опирающийся на полуокружность – прямой.*

Диаметр, перпендикулярный хорде

Теорема 1: *Диаметр, перпендикулярный хорде, не проходящей через центр окружности, делит эту хорду и стягиваемые ею дуги пополам.*

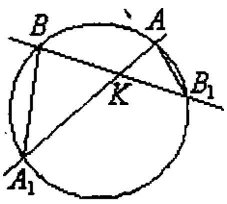
Теорема 2: *Диаметр, делящий дугу пополам, делит пополам и стягивающую ее хорду и перпендикулярен этой хорде.*

Теорема 3: *Диаметр, делящий хорду, не проходящую через центр окружности, пополам, перпендикулярен этой хорде и делит пополам стягиваемые ею дуги.*

Произведение отрезков секущих

Теорема. *Если две секущие пересекаются в точке К и одна из них пересекает окружность в точках А и A_1, а другая в точках В и B_1, то $A_1K \cdot KA = B_1K \cdot KB$*

Доказательство: Соединим отрезками точки *А и* B_1, A_1 *и В* соответственно. Углы *А* и *В* треугольников AB_1K и BA_1K равны, как вписанные углы,



опирающиеся на одну дугу. Кроме того, эти треугольники имеют по равному углу *К,* следовательно треугольники AB_1K и BA_1K являются подобными и их стороны являются пропорциональными, то есть $\frac{KA}{KB} = \frac{B_1K}{A_1K}$, откуда $A_1K \cdot KA = B_1K \cdot KB$.

что и требовалось доказать.

Вписанная окружность

Определение. *Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.*

Многоугольник в этом случае называется *описанным около окружности.*

Следствие 1. Центр окружности, вписанной в многоугольник, есть точка равноудаленная от всех сторон этого многоугольника, - точка пересечения биссектрис углов этого многоугольника.

Следствие 2. В многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну, тогда и только тогда, когда биссектрисы его углов пересекаются в одной точке.

Следствие 3. В любой треугольник можно вписать окружность.

Следствие 4. В правильный многоугольник можно вписать окружность.

Теорема 1. *В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.*

Теорема 2. *Если окружность радиуса* r *вписана в многоугольник площадь которого равна S, а полупериметр – p, то имеет место соотношение* $S = pr$.

Описанная окружность

Определение. *Окружность называется описанной около многоугольника, если все вершины многоугольника принадлежат этой окружности.*

Многоугольник в этом случае называется *вписанным в окружность.*

Следствие 1. Центр окружности, вписанной в многоугольник, есть точка равноудаленная от всех вершин этого многоугольника, – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого многоугольника.

Следствие 2. Около многоугольника можно описать окружность, и притом только одну, тогда и только тогда, когда серединные перпендикуляры к сторонам этого многоугольника пересекаются в одной точке.

Следствие 3. Около любого треугольника можно описать окружность.

Следствие 4. Около правильного многоугольника можно описать окружность.

Теорема 1. *Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны* $180°$.

Следствие. Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда эта трапеция – равнобедренная.