Кисельников Игорь Васильевич,
канд. пед. наук, доцент кафедры математики и
теории обучения математике АлтГПУ

Задачи с развернутым ответом по планиметрии и их оценивание

В планиметрических задачах под конфигурацией понимается конечное множество точек и прямых, принадлежащих одной плоскости и связанных между собой отношением принадлежности. Иначе ее называют геометрической фигурой.

Линейной считают фигуру, представляющую собой точку, отрезок, луч, прямую. Прямолинейной фигурой считают любой многоугольник. Плоской геометрической фигурой называют любую совокупность точек и линий на плоскости.

Требования к выполнению заданий с развернутым ответом заключаются в следующем: решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений обучающегося. Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным.

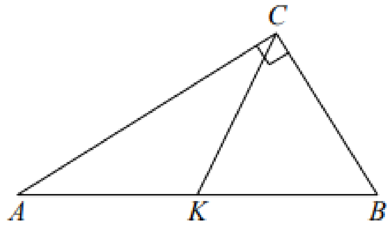
Не следует требовать от учащихся слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов). Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов.

Если решение заданий 20–25 удовлетворяет этим требованиям, то выставляется полный балл – 2 балла за каждое задание. Если в решении допущена ошибка непринципиального характера (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньший указанного, что и отражено в критериях оценивания заданий с развернутым ответом.

Задача 23.

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты: $AC = 6$, $BC = 8$. Найдите медиану CK этого треугольника.

Решение.



$$CK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BC^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64} = 5.$$

Ответ: 5.

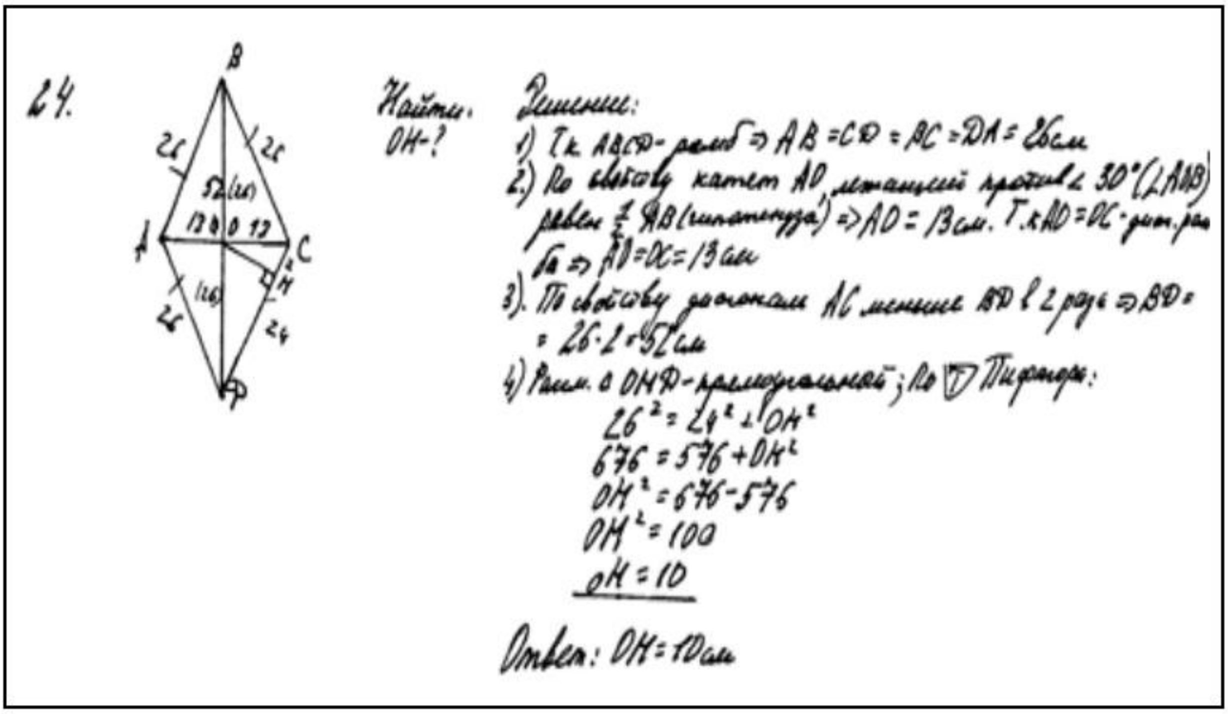
Критерии оценивания выполнения задания 23

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Пример оценивания решения задания 23.

Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



24.

Найти: OH-?

Решение:

1) Т.к. ABCD - ромб ⇒ AB = CD = BC = DA = 26 см
2) По свойству катет AD, лежащий против ∠ 30° (∠ABD) равен ½ AB (гипотенуза) ⇒ AD = 13 см. Т.к. AO = OC - диаг. ра... ⇒ AO = OC = 13 см
3). По свойству диагонали AC меньше BD в 2 раза ⇒ BD = 26 · 2 = 52 см
4) Рассм. △OHD - прямоугольный; по Т Пифагора:

26² = 24² + OH²
676 = 576 + OH²
OH² = 676 − 576
OH² = 100
OH = 10

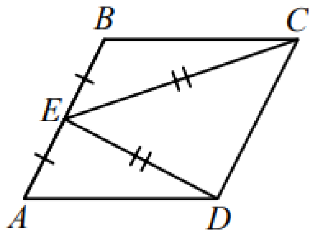
Ответ: OH = 10 см

Комментарий. Учащийся использует данные, которых нет в условии (считая острый угол ромба 60°). Оценка эксперта: 0 баллов.

Задание 24.

В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AB. Известно, что $EC = ED$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

Доказательство. Треугольники BEC и AED равны по трём сторонам.



Значит, углы CBE и DAE равны. Так как их сумма равна $180°$, то углы равны $90°$. Такой параллелограмм — прямоугольник.

Критерии оценивания выполнения задания 24

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Пример оценивания решения задания 24.

Пример. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, центры E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой EF.

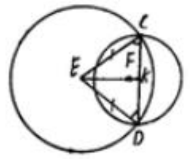
№25

Дано:

окр(E); окр(F)

окр(E) $\cap$ окр(F) = C и D

Док-ть: $CD \perp EF$



~~Решение~~ Доказательство

Проведём EC и ED — радиусы, тогда EC = ED.

$\triangle ECD$ - равнобедренный, т.к EC = ED (как радиусы) => $\angle EDC = \angle ECD$,

CK = KD => $\triangle EKC = \triangle EKD$ (по 2 сторонам и углу между ними).

Тогда $\angle CEK = \angle DEK$ => EK - биссектриса $\angle CED$. В равнобедренном треугольнике биссектриса, выпущенная из вершины, является медианой и высотой => $EF \perp CD$ ч.т.д.

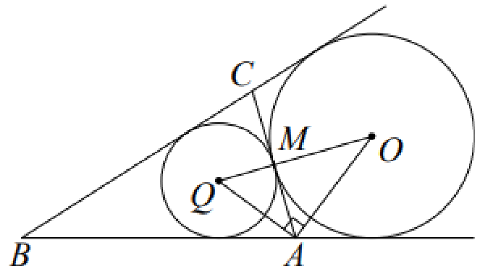
Комментарий. Не доказано, что точка F лежит на высоте EK. Оценка эксперта: 0 баллов.

Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания AC. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.

Пусть O — центр данной окружности, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Точка касания M окружностей делит AC пополам.



Лучи AQ и AO — биссектрисы смежных углов, значит, угол OAQ прямой. Из прямоугольного треугольника OAQ получаем: $AM^2 = MQ \cdot MO$. Следовательно,

$$QM = \frac{AM^2}{OM} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

Критерии оценивания выполнения задания 25

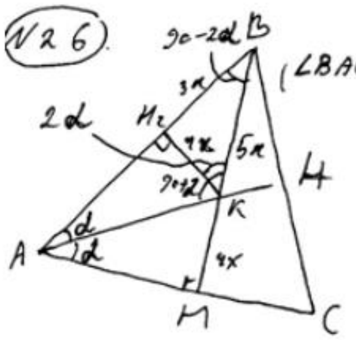
Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Пример оценивания решения задания 25.

Биссектриса угла А, треугольника АВС делит высоту ВН в отношении 5:4, считая от вершины. ВС равно 6. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: 5.

№26



($\angle BAC = 2\alpha$) опустим из K на AB высоту. Она равна KH т/к AC биссект.

$\angle AKB = 90+2$ как внеш. к

$\Delta AKH \Rightarrow \angle ABK = 9-22 \Rightarrow$

$\angle BKH = 22$ по т [illegible]

$H_2B = 3x$ ($\sqrt{4x^2+5x^2} = \sqrt{9x^2} = 3x$) $\Rightarrow$

$\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$

по т синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \frac{BC}{\sin 2 2} = 2R \Rightarrow$

$R = \frac{6}{\frac{6}{5}} = 5$

Ответ: $R = 5$

Комментарий.

При правильном ответе решение содержит более одной ошибки и описки.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Основные элементы теории, используемые при решении планиметрических задач ОГЭ, ГВЭ и ЕГЭ.

Включают в себя:

- свойства треугольника;
- свойства равнобедренного треугольника;
- тригонометрические соотношения;
- свойства четырёхугольников;
- свойства окружностей;
- свойства вписанных и описанных многоугольников;
- формулы площадей.