Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт педагогики и психологии детства

В.П. Ручкина

Курс лекций
по теории и технологии обучения математике в начальных классах

Учебное пособие

Часть 2

Екатеринбург 2019

УДК 372.47
ББК Ч426.221-243
Р92

Рекомендовано Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Уральский государственный педагогический университет» в качестве *учебного* издания (Решение № 35 от 23.05.2019)

Автор:
В.П. Ручкина
кандидат педагогических наук, доцент

Рецензент:
Л.В. Воронина,
доктор педагогических наук, профессор

Ручкина, В. П.
Р92 Курс лекций по теории и технологии обучения математике в начальных классах [Электронный ресурс] : в 2 частях : учеб. пособие / В. П. Ручкина ; Урал. гос. пед. ун-т. – Электрон. дан. – Екатеринбург : [б. и.], 2019. – Ч. 2. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

ISBN 978-5-7186-1170-0 (ч. 2)
ISBN 978-5-7186-1169-4

Пособие составлено в соответствии с программой курса «Теория и технологии обучения математике в начальных классах» в рамках стандарта подготовки студентов по направлению «Начальные классы». В пособии раскрываются частные вопросы теории и технологии обучения математике младших школьников.

Пособие направлено на формирование творческого и профессионального потенциала будущего учителя начальной школы. Материалы предназначены для студентов высших и средних педагогических учебных заведений.

УДК 372.47
ББК Ч426.221-243

ISBN 978-5-7186-1170-0 (ч. 2)
ISBN 978-5-7186-1169-4

Оглавление

Глава 1. Обучение вычислениям в курсе математики начальных классов

1.1. Характеристика видов вычислений и вычислительных приемов

План лекции

1. Виды вычислений
2. Характеристика вычислительного приема
3. Этапы формирования вычислительных умений

1. Виды вычислений

Формирование у школьников 1-4 классов вычислительных умений и навыков традиционно считается одной из основных задач курса математики в начальной школе.

Роль этих знаний в младшем школьном возрасте особенно значительна, поскольку изучение многих других дидактических единиц по математике немыслимо без вычислительных умений. Развитие вычислительной деятельности способствует:

– развитию универсальных учебных действий, которые проявляются в умении планировать деятельность в соответствии с поставленной задачей, умения осознавать не только результат своей деятельности, но и сам процесс этой деятельности, понимать зависимость результата от характера процесса деятельности;

– влияет на формирование гибкости, рациональность мышления, умение осуществлять анализ ситуации и отбирать рациональные средства для ее решения;

– формирует умение моделировать действие.

По способу производства действий вычисления делятся на три вида: устные, письменные и полуписьменные.

Устные вычисления в сформированном виде выполняются мысленно, без записи чисел или с записью выражений и результата в строчку. При этом сами вычисления выполняются разными способами и начинаются с единиц высшего разряда. Устные вычисления в процессе усвоения могут быть доведены до уровня навыка. Вычисления протекают в форме автоматизированного (неосознаваемого) психического регулирования, а обращение к развернутому алгоритму выполнения действия происходит только в случаях затруднений или по требованию учителя, желающего проверить степень осознанности выполняемого действия или для осуществления проверки правильности выполненного действия.

Устные вычисления в свою очередь делятся на табличные и внетабличные. К табличным вычислениям относят все случаи выполнения сложения и умножения с однозначными числами и соответствующие им случаи вычитания и деления. Например, к табличным вычислениям относят случай 4•5=20, соответствующие ему случаи деления будут 20:4=5 и 20:5=4.

К устным внетабличным приемам вычислений относят все случаи вычислений в пределах сотни, кроме табличных, и сводимые к ним вычисления с многозначными числами. Например, к устным внетабличным вычислениям относят прием вида 45-12 и сводимые к этому приему вычисления вида 450-120 или 4500-1200.

Письменные вычисления характеризуются тем, что в процессе вычислений производится запись, как результата действия, так и промежуточных операций. Этот вид вычислений имеет особую форму записи «в столбик». Вычисления выполняются по установленным правилам (алгоритмам) и начинаются с единиц меньшего разряда (кроме деления). Письменные вычисления формируются на уровне умений и выполняются с опорой на усвоенный алгоритм выполнения действия, который постепенно сокращается, приобретая некоторые операциональные характеристики, но усвоенный алгоритм всегда остается регулирующей основой вычислительного действия.

Полуписьменные вычисления характеризуются частичным использованием признаков устных и письменных вычислений и чаще всего используются в особых приемах вычислений и при округлениях:

328•25=328•100:4=328:4•100=8200.

К полуписьменным вычислениям относят и деление в столбик, поскольку этот вид вычислений начинается с единиц старшего разряда, а запись осуществляется в столбик, следовательно, он обладает признаками письменных и устных вычислений.

2. Характеристика вычислительного приема

Под вычислительным приемом (ВП) понимают совокупность операций, приводящую к нахождению результата вычислений в выражениях определенного типа. В устных вычислениях чаще всего эта совокупность состоит из следующих операций:

– разбивка одного из чисел на части (разрядные слагаемые или удобные слагаемые, множители и др.), что приводит к получению составного выражения;

– применение свойства арифметического действия для изменения порядка действий в полученном составном выражении с целью применения удобного способа вычисления;

– выполнение во вновь полученном составном выражении вычислений по правилу порядка действий;

– применение ранее изученных вычислительных приемов.

Подробное проговаривание этих операций составляют полный, развернутый алгоритм рассуждений. Например, для вычислительного приема вида 40+12 он будет следующим. «Чтобы к 40 прибавить 12 можно, 12 разложить на сумму разрядных слагаемых 10 и 2 и эту сумму прибавить к числу 40. Получим составное выражение 40+(10+2). Чтобы вычислить значение этого составного выражения можно изменить в выражении порядок действий, применив правило прибавления суммы к числу (сочетательное свойство суммы). Удобно к числу 40 прибавить 10 и к полученному результату прибавить второе слагаемое 2. Получим второе составное выражение (40+10)+2. Вычислим значение этого выражения, применив правило порядка действий. Вычисляем: к 40+10=50, к 50+2=52. Значение суммы чисел 40 и 12 равно 52.» Символическая запись этого рассуждения имеет вид:

$$40+12=40+(10+2)=(40+10)+2=50+2=52.$$

Такой алгоритм должен быть представлен детям на уроке ознакомления с вычислительным приемом, затем он постепенно сокращается и переходит в умственный план.

Овладеть вычислительным приемом, значит, для каждого вида вычислительного приема знать, какие операции и в каком порядке следует выполнять, чтобы найти результат арифметического действия и выполнять эти операции достаточно быстро в развёрнутом и свёрнутом виде.Вычислительный приём имеет название, теоретическую основу, алгоритм рассуждений и опирается на определенную совокупность базовых знаний.

Название вычислительного приёма складывается из названия вида вычислений (письменные, устные), проговаривания действия, которое используется в вычислении (сложение, вычитание, умножение или деление) и названия чисел по их значности (однозначное, двузначное).

Например: 371*8 – письменное (вид вычисления) умножение (действие) трёхзначного числа на однозначное (названия чисел по их значности).

В основе методики формирования вычислительных умений и навыков положен принцип сведения нового вычислительного приема к ранее изученным. Это значит, что каждый ВП требует знания определенной совокупности базовых знаний, опираясь на которую можно организовать самостоятельную деятельность детей по открытию нового ВП и его осознанное усвоение. Например, для вычислительного приема «умножение двузначного числа на однозначное» (34•2) базовой может быть следующая совокупность знаний:

– разрядный состав чисел;
– свойство умножения суммы на число;
– правило порядка действий;
– умножение круглых десятков на однозначное число;
– табличные случаи умножения;
– сложение двузначных чисел.

Теоретической основой ВП могут служить свойства арифметических действий или следствия из них, с помощью которых данный вычислительный прием сводят к ранее изученным, и таким образом находят значение данного выражения. Например, для рассмотренного нами случая, теоретической основой является правило вычитания суммы из числа. Для вычислительного приема 540•60 – умножение трехзначного числа, оканчивающегося нулями на круглые десятки – теоретической основой может служить правило умножения числа на произведение, которое позволит свести данный вычислительный прием к ранее изученным: 540•6 – умножение трехзначного числа, оканчивающегося нулями на однозначное и 3240•10 – умножение числа на 10.

540•60=540• (6•10)=(540•6)•10=3240•10=32400

Именно этот подход фиксируется в записи при письменных вычислениях:

$$\begin{array}{r} \times 540 \\ \underline{60} \\ 32400 \end{array}$$

Один и тот же ВП может иметь несколько теоретических основ. Например, значение выражения 423+245 можно вычислить, используя сочетательное свойство сложения:

423+245=423+(200+40+5)=((423+200)+40)+5=(623 + 40)+5 =663+5=668.

Можно при рассуждениях опираться на знание вопросов, связанных с нумерацией чисел, а именно, знание поразрядного состава чисел, тогда рассуждаем так:

423+245=4 с. 2 д. 3 ед.+2 с. 4 д. 5 ед.=(4 с.+2 с.)+(2 д.+4 д.) +(3 ед.+5 ед.)=6 с. 6 д. 8 ед.=668.

В то же время можно выделить группы приемов, имеющих одинаковую теоретическую основу, что позволяет использовать общие подходы в методике формирования соответствующих умений и навыков (см. таблицу).

Устные вычислительные приемы	Теоретическая основа устных вычислительных приемов
a±2, a±3, a±4, a±0, 1·a, 0•a	Конкретный смысл арифметических действий
2+8, 34+20, 36+4, 50-3, 8+4, 14-5, 45+7, 40+28, 56-23, 63+18, 13•5, 5•13, 81:3, 16•30 и др.	Свойства арифметических действий или следствия из них
9-7, 21:3, 66:20, 54:18, 8:1, 0:7	Связь между компонентами и результатом арифметических действий
a+1, 10+6, 6+10, 16-10, 16-6, 57•10, 1200:100 и аналогичные им для больших чисел	Вопросы нумерации чисел
приемы округления чисел (46+19, 512-298) и приемы умножения и деления на 5, 25, 50, 11, 9 и др.	Зависимость, указывающая на изменение результатов арифметических действий в зависимости от изменения одного из компонентов
a•1, a:1, a•0, 0:a	Особые случаи, выполняемые на основе специально сформулированных правил

3. Этапы формирования вычислительных умений

Формирование вычислительных умений и навыков – одна из основных задач начального курса математики.

Вычислительные умения – это развёрнутое осуществление действия, в котором каждая операция осознаётся и конкретизируется. В отличие от умения вычислительные навыки характеризуются свёрнутым, в значительной мере автоматизированным выполнением действия с пропуском промежуточных операций, когда контроль переносится на конечный результат. Следует понимать, что каждый навык в процессе своего становления проходит стадию умения, и его формирование протекает по тем же этапам, что и умение.

Принято считать, что процесс вычислений требует только репродуктивного воспроизведения соответствующего алгоритма. Поэтому в педагогической практике имеет место такой подход, при котором обучение вычислительным приемам идет репродуктивным путем. Деятельность детей состоит во внимательном слушании учителя, выполнении практических действий по заданной инструкции или образцу, объяснении готового решения. В этих условиях вычислительные навыки формируются в результате выполнения большого числа однообразных заданий и не приобретают необходимых качественных характеристик. При таком обучении не происходит и существенного умственного развития.

При выделении этапов формирования вычислительных умений и навыков необходимо, прежде всего, опираться на теорию поэтапного формирования умственных действий (Л. С. Выготский, П. Я. Гальперин, Н. Ф. Талызина). В ее основе лежит идея о принципиальной общности внутренней и внешней деятельности человека. Согласно этой идее, умственное развитие, как и усвоение знаний, навыков и умений, происходит путем интериоризации, т.е. поэтапном переходе внешней материальной деятельности во внутренний умственный план. В результате такого перехода, действия с внешними предметами преобразуются в умственные и интериоризируются (усваиваются). При этом они подвергаются обобщению, вербализуются, сокращаются и становятся готовыми к дальнейшему внутреннему развитию, которое может превышать возможности внешней деятельности.

В соответствие с теорией поэтапного формирования умственных действий последовательность усвоения алгоритма ВП слагается из следующих этапов.

1. Предварительное знакомство с алгоритмом ВП, т. е. с совокупностью операций, которая приводит к нахождению результата вычислений и является ориентировочной основой вычислительного действия (ООД). Знакомство осуществляется с помощью построения различных видов моделей (материальной, графической, математической) выполнения действия. На этом этапе следует учитывать самый оптимальный способ подачи ориентировочной основы действия, стремиться создавать проблемную ситуацию и максимально включать детей в поиск ООД. Необходимо проговаривать систему условий выполнения изучаемого вычислительного приема, обучая детей приводить примеры выражений, вычислить значение которых можно путем использования данного алгоритма.

2. Выполнение действия в материальном или материализованном виде. На данном этапе учащиеся самостоятельно в соответствии с заданием выполняют действие в развернутой форме, оперируя реальными предметами (материальная форма) или преобразуя графическую или символическую модели (материализованная форма).

3. Этап внешней речи. Здесь функцию ООД выполняет речь. Учащиеся проговаривают вслух в определенной последо-

вательности ту совокупность операций, которая входит в ВП. При этом в их сознании происходит обобщение, сокращение учебной информации, а алгоритм выполнения действия начинает автоматизироваться. В развернутой записи вычислений происходят сокращения. Отдельные операции проговариваются, но уже не записываются.

4. Этап внутренней речи. На этом этапе обучаемые про себя проговаривают алгоритм выполняемого действия. При этом делается акцент только на наиболее сложные значимые операции, что способствует дальнейшему мысленному свертыванию и обобщению алгоритма. Записи максимально сокращаются.

5. Этап автоматизированного действия. Учащиеся автоматически выполняют вычислительное действие. Это свидетельствует о том, что действие интериоризировалось, т.е. перешло во внутренний план, и необходимость во внешней опоре отпала.

Формирование вычислительных умений и навыков можно осуществлять, придерживаясь следующих методических этапов: подготовка к восприятию вычислительного приема, восприятие нового материала, осознание и осмысление всех характеристик вычислительного приема, закрепление и применение сформированного вычислительного умения.

Этапы формирования вычислительных умений

Подготовка к восприятию	Восприятие материала	Осознание и осмысление	Закрепление и применение
1. Перспективная подготовка. 2. Непосредственная подготовка к	1. Фиксация затруднения 2. Постановка учебной проблемы 3. Поиск решения учебной	1. Выполнение упражнений, удовлетворяющих принципам: полноты, однотипности,	1. Введение ВП в систему ранее изученных знаний 2. Отработка качеств ВН 3. Формиро-

восприятию • актуализация опорных (базовых) знаний; • мотивация деятельности; • создание проблемной ситуации.	проблемы 4. Выделение общего способа действия, фиксация его в виде различных моделей	контрпримеров, сравнения, непрерывного повторения, вариативности. 2. Пооперационный контроль и коррекция	вание действия контроля 4. Итоговый тематический контроль

Этап подготовки к восприятию нового вычислительного приема предполагает проведение тщательной перспективной и непосредственной подготовки.

Перспективная подготовка предполагает, что учащиеся предварительно изучают все знания, которые являются базовыми для нового вычислительного приема. Этому способствует основополагающий принцип изучения вычислительных приемов: сведение нового вычислительного приема к ранее изученным.

Непосредственная подготовка к изучению нового ВП традиционно предполагает: актуализацию опорных знаний из числа тех, которые входят в состав базовых для нового вычислительного приема. Актуализация знаний предполагает решение трех задач:

– воспроизведение понятий и алгоритмов, необходимых и достаточных для «открытия» нового знания;

– создание положительной мотивации к изучению нового ВП;

– использование логических приемов мышления.

При отборе упражнений для данного этапа важны все три составляющих: первая позволяет содержательно подготовить этап открытия нового знания. Вторая обеспечивает положительную эмоциональную направленность на включение ученика в следующий этап урока. Третья активизирует мыслительные способности учащихся через использование анализа, синтеза, сравнения, классификации, аналогии, обобщения.

Следует подчеркнуть значимость создания ситуации успеха для каждого ребенка на этапе актуализации знаний, поскольку положительный результат, зафиксированный ребенком в сознании, создает положительную эмоциональную направленность на его включение в следующий этап урока.

Этап восприятия нового знания будет организован с большим развивающим эффектом, если введение нового материала будет организовано через проблемную ситуацию. Этот прием в большей степени активизирует процесс мышления и требует высокой степени теоретического обобщения.

В современных УМК предоставляются условия для использования технологии проблемно диалогического обучения, которая позволяет учащимся самостоятельно «открывать» знания, а значит включать детей в продуктивные виды деятельности [41].

Известно, что новое знание принимает четкие формы в сознании ученика, если оно зафиксировано в форме алгоритма, схемы или языковой записи, принятой в данной дисциплине и в данной технологии. В связи с этим, на данном этапе следует оформлять новый алгоритм в виде символической или графической модели, фиксировать его вербально, что создает основу для развития способности к новому виду математической деятельности – моделированию и способствует его пониманию и запоминанию.

Этап восприятия нового вычислительного приема заканчивается первичным закреплением развернутого алгоритма выполнения вычислительного действия.

С этой целью несколько аналогичных примеров выполняются детьми у доски. Выполнение первых заданий полезно сопровождать полным теоретическим обоснованием, затем перейти к поиску путей сокращения алгоритма и записи вычислений. Переход к выполнению вычислений по сокращенному алгоритму и сокращенной записи должен осуществляться индивидуально по мере усвоения и осознания значения каждой операции учеником.

Ознакомление детей с новым ВП в основном происходит на одном уроке, в конце которого полезно провести небольшое тестирование для выявления уровня усвоения алгоритма ВП каждым учеником и умения отбирать те выражения, значения которых можно вычислить с помощью этого алгоритма. Ниже приведен пример такой самостоятельной работы.

Полученные в результате тестирования результаты помогут учителю осуществить дифференцированный подход в обучении и с учетом данных тестирования определить содержание следующего урока, с которого начинается следующий этап формирования ВП.

Завершая этот этап, следует особое внимание уделить подведению итога, обсуждению процесса получения результата, различным видам моделирования вновь спроектированного алгоритма выполнения действия, его проговариванию в свернутой и развернутой форме. Именно на этот образец будет ориентироваться ученик на следующих этапах и при самостоятельных вычислениях.

На этапе осознания и осмысления школьниками ВП полезно предложить совокупность упражнений, удовлетворяющую принципам полноты, однотипности, сравнения, вариативности, контрпримеров, непрерывности, единственного различия.

Эти принципы или требования к процессу отбора упражнений необходимо реализовать как для осознания и осмысления приема вычислений, так и для развития логических приемов мышления.

Раскроем принципы отбора совокупности упражнений, которую полезно предлагать учащимся на этапе осознания и осмысления вычислительного приема.

Реализация принципа полноты предполагает, что совокупность упражнений будет содержать задания, обеспечивающие осознанное применение всех операций, связанных с усвоением изучаемого вычислительного приема. К ним мы относим упражнения:

– на отбор выражений, значение которых можно находить с помощью изученного вычислительного приема;

– на отработку каждой операции, входящей в состав вычислительного приема;

– на понимание математического смысла и последовательности выполнения каждой операции, входящей в состав алгоритма;

– на осуществление контроля и оценки выполненного вычислительного приема.

Совокупность упражнений будет соответствовать принципу однотипности, если на каждую из выше перечисленных операций будет выполнено достаточное число однотипных упражнений. При этом достаточность определяется индивидуальными особенностями скорости усвоения материала каждым учеником класса. Для осознания и осмысления операции некоторым детям достаточно выполнить одно упражнение, для других этого количества бывает недостаточно. Здесь нужно подходить дифференцированно, ориентируясь на уровень развития детей в классе и организовать работу так, чтобы одним стало понятно, а другим было интересно.

Принцип контрпримеров предполагает включение в совокупность таких заданий, которые провоцируют ученика на ошибку. Умение увидеть ошибку – это уже определенный уровень освоения алгоритма вычислительного приема. В связи с этим такие упражнения могут служить как для осознания и осмысления вычислительного приема, так и для диагностики уровня сформированности вычислительного приема и самоконтроля. Кроме того, такие задания дети воспринимают как своеобразную игру, с интересом включаются в диалог по обоснованию причин возникновения ошибки и правильному выполнению действия, что способствует повышению познавательной мотивации.

Применение принципа сравнения предполагает включение некоторого ряда взаимосвязанных заданий, позволяющих подчеркнуть сходство и различие нового и ранее изученного вычислительных приемов. Алгоритм вычислительных приемов дает для сравнения богатейший материал. Сравнивать можно, опираясь на схематическую, математическую модель выполнения действия, на теоретическую основу вычислительного приема и другие его характеристики. В процессе формирования вычислительных навыков скрыты немалые возможности для существенного развития мышления детей путем использования заданий на сравнение, классификацию, подведение под понятие, выведения следствия из факта принадлежности объекта к понятию. Задача учителя – реализовать их в полной мере через совокупность упражнений, предполагающих использование логических приемов мышления.

Принцип вариативности полезно использовать двояко: варьировать формы выполнения вычислительного приема (варьируя модели вычислительного приема, осуществляя переход от одной модели к другой) и видоизменять форму подачи заданий (используя формулировки: вычисли, допиши, прочитай разными способами, сравни, назови вычислительный прием и т. д.).

Принцип непрерывного повторения предполагает включение вновь изученного вычислительного приема в контекст ранее изученного материала. Это могут быть задачи, уравнения, вычисления на нахождение значений величин и другие, ранее изученные понятия.

Следует понимать, что реализация всех этих принципов вовсе не требует большого числа упражнений, разумно подбирать такие задания, выполнение которых предусматривает реализацию сразу нескольких принципов.

На этапе закрепления и применения детям предлагается совокупность упражнений, удовлетворяющая принципу непрерывного повторения, т. е. вновь изученный ВП будет включаться в систему ранее усвоенных знаний. Кроме того, на этом этапе учитель предусматривает решение следующих обучающих задач:

– формирование умения проверять правильность вычислений и работать над допущенными ошибками;

– доведения изученного ВП до уровня умения или навыка со всеми присущими им качествами.

Для решения первой задачи полезно обучать детей работе над ошибками. В этой технологии можно выделить шесть этапов, на каждом из которых используются специальные методические приёмы, формирующие у детей учебные действия контроля и оценки. Результатом такой работы может быть составленный ребенком справочник вычислительных ошибок.

1. Выяснение, какие ошибки можно допустить при выполнении заданий на вычисления и каков характер этих ошибок. Это могут быть ошибки по содержанию (неправильное использование алгоритма вычисления, сложение или вычитание единиц в разряде) и ошибки на невнимание (неверно списал цифры при записи чисел, поставил не тот знак, знак поставил правильно, но выполнял другое действие). Следует предусмотреть ошибки на неверное выполнение операций, входящих в состав действия, пропуск этих операций и т. д.

2. Знаковая фиксация ошибок. Следующий этап свя-

зан с поиском знаковых форм фиксации ошибок. Ученики при участии учителя разрабатывают и придумывают значки для обозначения каждой ошибки.

3. Упорядочивание ошибок. Ученики, прежде чем начать выполнять то или иное задание, представляли, какие ошибки можно допустить при его выполнении. Такая работа учит мысленно составлять план собственных действий раньше, чем ребенок приступит к выполнению заданий.

4. Работа с контролирующей карточкой. Упорядочивая ошибки, ученики должны осмыслить и выстроить в какой последовательности и как они будут обнаруживать эти ошибки. В результате учащиеся составляют «Справочник ошибок», где находятся карточки, в которых с помощью созданной символики фиксируют последовательность действий при проверке: первое – проверь вот это, второе – проверь вот это, третье – проверь вот это.

Ученик выполняет задание сначала до конца, затем возвращается в начало, читает карточку и на каждом этапе проверяет, нет ли у него ошибок. При работе с карточкой очень эффективна работа в паре.

5. Выявление собственных проблем. Когда ученики совместно с учителем составили карточки для самоконтроля и начали работать с ними, то каждому ученику необходимо зафиксировать, где, на каком шаге у него появляются ошибки, и отметить эти шаги на карточке.

6. Предвидение ошибки и её предупреждение. На заключительном этапе ученик сначала должен посмотреть, где он может сделать ошибку, и только после этого начинать действовать.

В настоящее время существующие учебно-методические комплексы преуспели в разработке совокупности заданий, направленных на отработку как устных, так и письменных вычислений. Наиболее последовательно и обоснованно как с психологической, так и с методической точки зрения разработана совокупность упражнений в системе Д. Б. Эльконина – В. В. Давыдова.

Автор этой совокупности Э. И. Александрова. Всю совокупность упражнений она делит на 10 блоков, в некоторых из них выделяются еще и уровни.

Первый блок – задания, которые уже выполнены кем-то, а ребёнку нужно их оценить. (Учителями этот блок называется оценочным, ученик узнает информацию и оценивает ее). Этот блок включает в себя задания двух уровней.

1-ый уровень – задания, выполненные кем-то с использованием символической модели. Ученик должен оценить правильность выполненных заданий.

2-ой уровень – задания, выполненные кем-то без использования символической модели. Для того чтобы оценить правильность выполнения заданий, ребёнку сначала нужно выполнить символическую модель.

Второй блок – исполнительный. Эти задания ребёнку нужно выполнить самому.

1-й уровень – ребёнок выполняет задание сам, но ему дан готовый ответ, с которым он сравнивает свое выполнение.

2-й уровень – ребёнок выполняет задание сам, но ему даётся несколько ответов, среди которых один правильный, а остальные получены в результате типичных ошибок.

3-й уровень – ребёнок сам выполняет задание и сам доказывает правильность его выполнения.

Третий блок – рефлексивный. Это задания на придумывание самим ребёнком таких же заданий, как те, которые ему предложены учителем. Этот блок позволяет выяснить, умеет ли ребёнок выделять существенные связи и отношения в заданиях, которые даны учителем, и составить такие же.

Четвёртый блок – рефлексивно-методический. Это задания типа: «как научить других придумывать такие же задания».

Пятый блок – диагностический. Это задания с «ловушками» (можно выделить несколько типов «ловушек»: «ловушки на способ», «ловушки, связанные с недостающими или лишними данными» и др.).

Шестой блок – рефлексивно-диагностический. Это задания на придумывание детьми таких же «ловушек», что позволяет определить, насколько ученик видит «ошибко-опасные» места.

Седьмой блок – методико-диагностический, в котором ребёнок думает над вопросом, как научить других придумывать задания с «ловушками».

Восьмой блок – так называемые олимпиадные задачи, к которым относятся задачи, не выходящие за рамки изучаемых понятий по годам обучения, но требующие нестандартных способов решения.

Девятый блок – задания на придумывание детьми своих олимпиадных заданий по аналогии с данными в восьмом блоке.

Десятый блок – содержит задания, где ребенку предлагается научить других придумывать олимпиадные задания.

Данная совокупность заданий, предлагаемая в системе, нацелена на формирование компонентов учебной деятельности (осознание учебной задачи, планирование ее выполнения, осуществление самоконтроля и самооценки).

Таким образом, формирование полноценного вычислительного навыка должно обеспечиваться созданием ряда специальных условий. Первостепенное значение имеет систематическая работа по формированию мотивов учебной деятельности, организация поисковой, эвристической деятельности учащихся на этапе восприятия вычислительного приема, целенаправленный отбор заданий для обеспечения осознания и осмысления вновь вводимого вычислительного приема, насыщение всего процесса формирования заданиями с использованием приемов умственных действий, учет индивидуальных особенностей усвоения.

При формировании вычислительных умений и навыков необходимо исходить из того, что мышление – это активная, целенаправленная деятельность, в процессе которой осуществляется переработка имеющейся и вновь поступающей информации, отчленение внешних случайных или второстепенных ее элементов от основных или внутренних, отражающих сущность исследуемых ситуаций, раскрывается закономерная связь между ними.

Задача учителя заключается в умелом руководстве этой деятельностью. Управлять – не значит подавлять, навязывать процессу мышления ход, противоречащий его природе, а, наоборот, максимально учитывать эту природу, согласовывать каждое воздействие на процесс с его логикой и особенностями усвоения учащихся. В связи с этим, оптимально подобранная совокупность заданий на каждом этапе формирования вычислительного навыка становится средством его полноценного формирования.

Вопросы для самопроверки

1. С какими видами вычислений знакомятся учащиеся в начальной школе?
2. Дайте характеристику каждому виду вычислений. Приведите примеры.
3. Определите понятие «вычислительный прием».
4. Как дать название вычислительному приему?
5. Как определить теоретическую основу вычислительного приема и его базовые знания?
6. Перечислите этапы формирования вычислительных умений.
7. Охарактеризуйте задачи каждого этапа формирования вычислительных умений.

8. Раскройте приемы формирования умения проверять вычисления.

Задания для самоподготовки

1. Выполните логико-математический анализ изучения данной содержательной линии в первом (втором, третьем, четвертом) классе (учебник по выбору) и определите перечень знаний и умений, которые должны быть сформированы при изучении данной темы. Выполните это же задание по другим учебникам (по выбору). Заполните таблицу.

Перечень вычислительных приемов, последовательность изучения темы	Название вычислительного приема	Теоретическая основа вычислительного приема	Базовые знания	Сопутствующий материал

2. Выполните это же задание по другим учебникам (по выбору). Прокомментируйте различные подходы к последовательности изучения вычислительных приемов в разных числовых концентрах. Определите виды заданий, которые используются в учебниках на этапах:

– подготовки к восприятию вычислительного приема;
– восприятия вычислительного приема;
– осознания и осмысления вычислительного приема;
– закрепления и применения вычислительного приема.

Дайте оценку заданиям, используемым в учебниках различных методических комплексов.

3. Выберите по одному заданию из каждого этапа, определите их учебную задачу, предложите приемы работы с этими заданиями на уроке.

4. Составьте итоговую контрольную работу по одному из разделов, связанному с формированием вычислительных уме-

ний. Обоснуйте ее содержание, форму проведения, технологию оценивания и обработки результатов. Продумайте возможные варианты работы над ошибками. Какие дидактические пособия можно использовать при изучении этой содержательной линии?

5. Выпишите особые случаи умножения и деления. Выделите из них те, которые постулируются, и те, которые доказываются. Поясните доказательство каждого особого случая.

6. Охарактеризуйте методику работы над типичными вычислительными ошибками.

7. Составьте конспект урока по ознакомлению детей с делением с остатком. Составьте перечень вопросов, с помощью которых можно выявить усвоение детьми данной темы.

8. Приведите примеры приемов создания положительной мотивации в процессе изучения вычислительных приемов.

9. Охарактеризуйте методы и приемы организации учебной деятельности учащихся на этапе восприятия вычислительного приема.

10. Сформулируйте алгоритмы письменных вычислений в обобщенном и в адаптированном к возрасту виде.

11. Выполните математический анализ алгоритмов (установите теоретическую основу рассмотренных алгоритмов).

12. Выпишите типы заданий, которые используются авторами учебников при изучении алгоритмов письменных вычислений, при этом:

– сформулируйте учебную задачу для заданий из учебников;

– выберите задания, формирующие у школьников логические универсальные учебные действия анализа, синтеза, обобщения, конкретизации, сравнения, классификации и др.;

– установите, удовлетворяет ли совокупность заданий, предложенных для осознания и осмысления изучаемого вычислительного приема, принципам полноты, непрерывного повторения, вариативности и др.

1.2. Изучение табличных случаев умножения и соответствующих им случаев деления

План лекции

1. Характеристика табличного умножения
2. Этапы формирования табличных вычислений
3. Качества вычислительного навыка
4. Способы запоминания таблиц
5. Особенности изучения материала в различных учебно-методических комплектах

1. Характеристика табличного умножения

К табличным вычислениям относят те, в которых выполняются основные математические операции сложения и умножения над однозначными числами. Но поскольку каждая из этих операций имеет обратную ей (для сложения обратной операцией является вычитание, соответственно, для умножения – деление), то к табличным относят и соответствующие случаи с обратными операциями.

Таким образом, в курсе математики начальных классов изучается две разновидности табличных случаев вычислений:

– табличные случаи сложения и соответствующие им случаи вычитания;

– табличные случаи умножения и соответствующие им случаи деления.

Раскроем подробно методику изучения табличных случаев умножения и соответствующих им случаев деления, поскольку методика их изучения имеет сходные черты и изучается по одному плану.

Все знают «таблицу умножения», которую нередко печатают на обложках тетрадей по математике. Там даются столбцы, в которых указаны случаи умножения однозначного числа, начиная с числа 2 до числа 9, на последовательно увеличивающиеся однозначные числа от 2 до 9. Эти столбцы называют соответственно таблицей умножения 2-х; 3-х; 4-х и так далее до девяти. Запомнив эти табличные случаи умножения, мы без труда для каждого случая из таблицы умножения находим результаты трех других, связанных с ним, случаев умножения и деления. Например, зная, что 6•3=18, мы, не особенно задумываясь, можем найти результаты следующих выражений: 3•6, 18:6, 18:3. Происходит это потому, что между этими четырьмя случаями вычислений существует связь, которая обеспечивается математическими положениями (правилами, свойствами действий или связями между выполняемыми действиями). Рассмотрим эти положения.

Если взять случай 6•3 из таблицы умножения 6-ти, то значение 3•6 мы находим, применяя переместительное свойство суммы (Для любых *a, b*, принадлежащих множеству целых неотрицательных чисел верно равенство *a*•*b*=*b*•*a*). Значения следующих двух выражений 18:6 и 18:3 находят, используя связь между действиями умножения и деления. Поскольку деление есть действие обратное умножению, то из равенства *a*•*b*=*c*, вытекают верные равенства: *c*:*a*=*b* и *c*:*b*=*a*. В математике деление так и определяется как действие, с помощью которого по известному значению произведения и одному из множителей мы находим другой множитель.

Из названных математических положений вытекают методические особенности изучения табличных случаев умножения и соответствующих им случаев деления.

Изучение табличных случаев умножения и соответствующих им случаев деления предусматривает рассмотрение 4-х столбцов. Первый из них отражает последовательное умножение некоторого числа, например, числа 6 на однозначные числа от 2 до 9. Второй – умножение однозначных чисел от 2 до 9 на данное число 6, третий – деление результатов первого столбца на данное число 6 и четвертый – деление результатов первого столбика на однозначные числа от 2 до 9, где в результате получается число 6.

Каждый из этих столбцов в методике обучения математике имеет свое название. Первый столбец – умножение шести, второй – умножение на шесть, третий деление на шесть, четвертый – деление результатов первого столбика на однозначные числа со значением частного равным шести.

2. Этапы формирования табличных вычислений

Формирование табличного навыка сложный и длительный процесс, который осуществляется по тем же этапам, что и другие виды вычислений:

– подготовка к восприятию табличных вычислений,

– восприятие нового материала,

– осознание и осмысление всех характеристик табличных случаев умножения и соответствующих им случаев деления,

– закрепление и применение сформированного вычислительного навыка.

Цель перспективной подготовки – обеспечить усвоение теоретических вопросов, которыми учащиеся будут пользоваться при составлении табличных случаев умножения и деления. К этим вопросам на первом этапе следует отнести:

– смысл действия умножения как сложения одинаковых слагаемых;

– переместительное свойство умножения;

– распределительное свойство умножения относительно сложения (правило умножения числа на сумму);

– смысл действия деления.

– взаимосвязь между действиями умножения и деления;

– рассмотрение особых случаев умножения и деления ($a \bullet 1$; $a:a$; $a \bullet 10$).

На втором этапе дети знакомятся с табличными случаями умножения и соответствующими случаями деления. Составляют соответствующие столбики табличных случаев умножения и деления, опираясь на изученные теоретические положения. Знакомятся с сокращенной формой таблицы умножения (таблица Пифагора) и правилами пользования этой формой таблицы. В разных программах по математике и учебно-методических комплексах (УМК) табличное умножение и деление изучается по своему сценарию. Мы излагаем один из возможных вариантов.

Рассмотрим, как может быть введена таблица умножения и деления с числом 6.

На доске записывается два столбца.

6•2	2•6
6•3	3•6
6•4	4•6
6•5	5•6
6•6	*6•6*
6•7	*7•6*
6•8	*8•6*
6•9	*9•6*

В процессе диалога устанавливается, что значения первых четырех случаев умножения в первом и втором столбцах можно легко найти, т. к. дети знают таблицу умножения двух, трех, четырех, пяти и переместительное свойство умножения.

Значение выражения 6•6 дети могут найти, опираясь на смысл действия умножения. В начальных классах действие умножения трактуется как действие, с помощью которого можно найти значение суммы одинаковых слагаемых. Следовательно, 6•6=6+6+6+6+6+6=36. Для нахождения значения следующих выражений можно использовать распределительное свойство умножения относительно сложения. Например, чтобы найти результат умножения 6•7, можно 7 представить в виде суммы (6+1) и число 6 умножить на эту сумму, получим 6•7=6•(6+1)=6•6+6•1=36+6=42. В этом случае используется не только распределительное свойство умножения относительно сложения, но и знание табличных случаев умножения 6•6 и 6•1. Можно использовать и другое объяснение, установив закономерность получения каждого следующего результата в таблице умножения, можно отметить, что каждый следующий результат в таблице умножения увеличивается на первый множитель. (Если 6•7=42, то 6•8=42+6=48).

Далее уточняется, какие случаи умножения шести дети должны запомнить и как знание этих случаев использовать для нахождения случаев умножения на шесть и соответствующих случаев деления.

Два следующих столбцов деление на шесть и деление на однозначные числа со значением частного равным шести дети составляют самостоятельно с последующей проверкой, опираясь на взаимосвязь между действиями умножения и деления.

На третьем этапе осуществляется отработка навыка со всеми присущими ему качествами: правильность, скорость, осознанность, обобщенность, полнота, рациональность, поскольку в соответствии со стандартом табличные случаи умножения и соответствующие им случаи деления должны быть усвоены на уровне сознательного вычислительного навыка.

3. Качества вычислительного навыка

Под вычислительным навыком будем понимать автоматизированное выполнение учеником вычислительного действия.

Полноценно усвоенные вычислительные навыки характеризуются шестью качествами: правильностью, прочностью, осознанностью, обобщенностью, рациональностью и скоростью (автоматизацией).

Качество правильности проявляется в том, что ученик, правильно выбирает и выполняет вычислительные операции, входящие в состав действия, что позволяет ему получать верный результат. Наличие такого качества обычно устанавливается в процессе устного опроса, письменных самостоятельных работ или математического диктанта.

Осознанность навыка проявляется в том, что ученик осознает, на основе каких знаний осуществляется переход от одной операции к другой, какое правило определяет порядок выполнения операций. Ученик в любой момент может объяснить, как он вычислял и почему так можно находить значение выражения. Наличие данного качества можно выявить с помощью устного опроса, или специально составленных тестов.

Прочность выражается в том, насколько долго удерживается в памяти вычислительный прием и не утрачивается в тот период, когда он практически не используется. Данное качество обычно проверяется в начале нового учебного года, когда учитель дает тот же математический диктант, который проводился в конце предыдущего года. Сравнив результаты можно установить, какие из вычислительных приемов усвоены прочно, а какие требуют доработки или повторения.

Качество навыка обобщенность проявляется в умении переносить известный вычислительный прием в новые условия. Обычно это можно выявить при изучении сходного вычислительного приема в новом числовом концентре.

Рациональность проявляется в умении выбирать те способы вычисления, которые быстрее приводят к нахождению результата. Проверить наличие этого качества можно, предложив ученику вычислить значение выражения разными способами и выбрать из них рациональный способ.

Автоматизм (скорость) проявляется в качественном и быстром выполнении вычислительного действия за счет свертывания операций входящих в его состав. Автоматизм (скорость) ВП проверяют с помощью специально организованных математических диктантов «на скорость» и последующим сравнением результатов выполнения работы с нормой.

4. Способы запоминания таблиц

При организации деятельности детей по выработке навыка со всеми присущими ему качествами необходимо соблюдать психологические закономерности заучивания материала, среди которых можно назвать следующие.

1. Давать установку на запоминание, поскольку восприятие материала без установки на заучивание часто вообще не дает никаких результатов.

Данная закономерность учитывается всеми учителями и в той или иной мере предусмотрена во всех технологиях. Особенно целенаправленно эта закономерность используется в учебниках Н. Б. Истоминой, где в определенной системе даются установки на запоминание трех-четырех табличных случаев. При этом установка на запоминание таблицы ориентирована не на последовательное увеличение второго множителя (9•2, 9•3, 9•4), а на запоминание определенных табличных случаев. Например, первая порция, рекомендуемая для запоминания в таблице умножения числа 9, включает случаи 9•5, 9•6, 9•7. В качестве опорного может выступать случай 9•6, запомнив который учащиеся могут быстро найти значения произведений 9•5 и 9•7. Но в качестве опорного может выступать и случай 9•5.

Вторая порция, рекомендуемая для запоминания, включает случаи 9•2, 9•3, 9•4. Здесь внимание учащихся акцентируется на случае 9•3.

И, наконец, последняя порция включает случаи 9•8, 9•9, где, в качестве опорного может выступать случай 9•7.

Описанная методика формирования навыков табличного умножения, по мнению автора, позволяет учесть индивидуальные особенности памяти каждого ребенка, создает условия для непроизвольного и для произвольного запоминания таблицы и активизирует при этом смысловую память.

2. Другой закономерностью успешного заучивания материала является его осмысленность. Она зависит от того, имеются ли в арсенале обучающегося понятия и действия, необходимые для понимания учебного материала и установления связей между ними. Учитывая эту закономерность, авторы учебных программ по математике для начальной школы много учебного времени выделяют на подготовительный этап, где изучаются теоретические положения, на основе которых составляются табличные случаи умножения и соответствующие им случаи деления (см. подготовительный этап). Кроме того, даются специальные задания с установкой на смысловую память. Например: «Знаю, что 7•6=42, что еще можно знать, помня только этот случай умножения?». Или другой прием: «детям показывают один столбик таблицы со значениями произведений, а три других дети восстанавливают по памяти».

3. Заучивание материала облегчается, если обеспечивается его привлекательность, способность вызвать определенные чувства, радостные переживания, чувство удовлетворенности новыми достижениями.

Для использования этой закономерности успешного заучивания материала во многих технологиях используют специальные задания, активизирующие мыслительную деятельность детей, побуждающие их к самостоятельному открытию. Это задания на доказательство правильности выполненных действий, на составление заданий по указанным параметрам, задания на выбор, сравнение, преобразование выполненных действий, на выявления закономерностей получения результатов в той или иной таблице умножения.

Например, при изучении таблицы умножения шести дети самостоятельно могут установить следующие закономерности:

1) значения произведений в таблице умножения шести являются четными числами;

2) каждое следующее значение произведения увеличивается на шесть, а каждое предыдущее уменьшается на шесть;

3) при умножении шести на четное число последняя цифра в результате равна множителю не равному шести, а первая цифра результата равна второму множителю деленному на 2;

4) и др.

С этой же целью при изучении табличных случаев умножения и соответствующих им случаев деления используются различные игровые ситуации, например: «Игра в мяч», игра «Таблицу знаю» и др. Опишем некоторые из них.

1. Дать установку на запоминание. Затем детям показывают один столбик таблицы, а три других они восстанавливают по памяти.

2. Игра «Таблицу знаю». «Пусть нужно закрепить таблицу умножения с числом 3. Игроки становятся в круг, один из учеников становится в центр круга. По знаку ведущего дети начинают порядковый счет. Когда дойдет очередь до числа, которое делится на 3, ученик, стоящий в центре круга, должен сказать «таблицу знаю».

3. Игра «Знаю таблицу умножения». «Выходят десять участников игры, им вручаются номера от 1 до 10. Ведущий на-

зывает значение произведения каких-либо чисел, например 42. Выбегают вперед те дети, у которых номера в произведении дают число 42. Дети, которые ошибочно выбежали вперед, выходят из игры».

4. Один ребенок называет табличный случай умножения или деления и называет имя школьника, который будет отвечать.

5. Использование электронной таблицы умножения с установкой: «Проверь себя».

6. Организация работы детей в парах с целью взаимопроверки знания табличных случаев умножения.

7. Установки на смысловую память: «Знаю, что 7•6=42, что еще можно знать, помня только этот случай умножения?»

8. На внеклассных занятиях можно познакомить детей с таблицей умножения числа 9 на пальцах. «Поставить перед собой обе руки ладонями к себе. Пронумеруем пальцы обеих рук слева направо от 1 до 10. Пусть нам нужно узнать результат умножения 9•5. Зажимаем пятый палец слева. Число пальцев, расположенных слева от пятого, дадут нам число десятков в значении произведения, а число пальцев справа от пятого, дадут число единиц в значении произведения».

9. Задания типа «Восстанови запись». «На классной доске дана запись:

1). 1 2 3 =1

2). 1 2 3 4 =1

Задание: слева от знака «=» стерты скобки и знаки действий, поставь их так, чтобы равенства были верными». Ответ: 1). (1+2):3=1; 2). 1 или (1•2)+3-4=1.

10. Записать числа от 1 до 10. Под каждым из чисел дети записывают результат умножения каждого из чисел на 3 или любое другое число по заданию учителя:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

3 6 9 12 15 18 21 24 27 30

11.Научить находить табличные результаты умножения или деления с помощью таблицы Пифагора. Разрешать пользоваться ею некоторое время.

12.Проводить устные вычисления с использованием карточек. Для организации самостоятельной работы учащихся, целью которой является усвоение таблицы умножения, каждый случай табличного умножения рекомендуется фиксировать на карточке. На одной стороне выражение, например 9•3, а на другой его значение 27. Целесообразно на отдельные карточки занести и случай 3•9, так как в конечном итоге ставится задача усвоения одного и другого случая на уровне навыка.

Аналогично следует поступить со всеми случаями табличного деления. Это поможет учащимся действовать самостоятельно при запоминании табличных случаев умножения и деления и осуществлять самоконтроль.

Все упражнения на запоминание табличных случаев умножения и деления сопровождаются формированием умения читать выражения разными способами. Без последнего дети слабо распознают необходимость выбирать это действие в задаче.

Усвоение табличных случаев умножения обычно регулируется на основе обратной связи, т. е. непрерывного или периодического контроля и учета индивидуальных достижений.

Основными формами контроля при изучении данной темы являются: самоконтроль, взаимоконтроль, тестирование, математические диктанты, итоговые контрольные работы.

Результативность усвоения зависит от способов и форм осуществления контроля: организации поиска учащимися правильного ответа, способов сигнализации о допущенных ошибках, приемах их исправления, реакции педагога на ошибки и т. д. Следует проводить постоянный мониторинг формируемого умения и своевременную коррекцию хода его формирования с учетом индивидуальных и возрастных особенностей детей.

5. Особенности изучения материала в различных учебно-методических комплектах

В существующих на данный момент учебно-методических комплектах реализуются различные подходы к:

– распределению материала по классам обучения;
– последовательности изучения данной темы;
– способам введения теоретических основ данной темы;
– организации деятельности детей на этапе отработки вычислительного навыка.

Значительные различия наблюдаются в изучении последовательности табличного умножения и деления. В большей части учебно-методических комплектов при изучении данного материала придерживаются следующей последовательности. Сначала, в достаточно растянутые сроки, дети последовательно знакомятся с таблицей умножения 2-х, затем на 2. После знакомства с действием деления вводится таблица деления с числом 2. Такое растянутое во времени изучение таблицы умножения и деления с числом 2 объясняется необходимостью ввести сопутствующий материал (особые случаи умножения и деления, название компонентов и результата действий, понятия «увеличить» и «уменьшить» в 2 раза, задачи на умножение и деление.). Кроме того, необходимо ввести и на практике отработать умение применять все теоретические положения, определяющие способы получения табличных случаев умножения и деления (см. таблицу).

Название темы	Умения, формируемые при изучении этой темы
Таблица умножения 2-х	Умения находить результат умножения: замена простого выражения на умножение выра-

	жением на сложение одинаковых слагаемых; применение распределительного свойства умножения относительно сложения.
Таблица умножения на 2	Умение применять переместительное свойство умножения.
Табличные случаи деления с числом 2	Применять связь между умножением и делением.

Далее постепенно изучается таблица умножения и деления с числом 3, затем с числом 4 и т. д.

Принципиально иной подход к изучению данного материала наблюдается в учебниках Н. Б. Истоминой и И. И. Аргинской.

В учебнике Н. Б. Истоминой составление и усвоение таблиц умножения (деления) органически включается в содержательную линию курса. В связи с этим в учебнике нет даже заголовков «Умножение 2-х или на 2; умножение 3-х или на 3» и т. д.

Табличные случаи умножения учащиеся усваивают в процессе изучения смысла умножения и тех положений, которые мы относим к теоретической основе данной темы (см. темы: «Умножение», «Переместительное свойство умножения», «Увеличить в несколько раз», «Площадь фигуры», «Измерение площади», «Сочетательное свойство умножения»).

В теме «Умножение» большое внимание уделяется:

– разъяснению предметного смысла действия;

– усвоению детьми его определения как сложения одинаковых слагаемых;

– осознанию ими новой математической записи.

Для этой цели в учебнике даны различные виды упражнений:

– на выделение признаков сходства и различия данных выражений;

– на соотнесение рисунка и числового выражения;

– на запись числового выражения по данному рисунку;

– на выбор числового выражения, соответствующего рисунку;

– на замену произведения суммой;

– на сравнение числовых выражений;

– и т. д.

Сначала формируются навыки табличного умножения, а затем навыки табличного деления. Причем, при изучении действия деления и отработке навыков табличного деления выполняются те же условия, а именно: усвоение табличных случаев деления распределено во времени и органически включается в содержательную линию курса.

Мы рассмотрели только отличительные особенности последовательности изучения данного материала в различных образовательных программах. Важно подчеркнуть, что разброс в последовательности изучения материала обусловлен желанием авторов найти оптимальный путь для формирования прочного навыка табличного умножения и деления, поскольку этот материал определяет успех в усвоении других тем школьного курса математики, таких как решение задач, письменные вычисления и др.

Вопросы для самопроверки

1. Какие вычисления относят к табличным?

2. Какие математические положения используются при составлении столбцов на умножение и соответствующих случаев деления?

3. Охарактеризуйте этапы табличных случаев умножения и соответствующих случаев деления.

4. Какие приемы используются для запоминания табличных случаев умножения и деления?

5. Какие наглядные пособия можно использовать при составлении и заучивании таблиц умножения?

6. Почему в таблицу умножения четырех не входит случай 4•1?

Задания для самоподготовки

1. Приведите возможные рассуждения учащихся при выполнении следующего задания в теме «Табличное умножение и деление».

Найдите значения выражений:

24·7-24·6

28·6-28·5

8·98-7·98

Обоснуйте свой ответ.

2. Какие методы обучения будут ведущими на уроке ознакомления с таблицей умножения трех? Обоснуйте свой ответ.

3. Найдите в учебнике Н. Б. Истоминой «Математика-2» задание на составление таблиц деления с числом 2. На какие знания и умения опираются учащиеся при выполнении данного задания?

4. Приступая к изучению каждого табличного случая умножения и деления, учитель может предложить учащимся следующие виды упражнений.

– Посчитайте двойками, тройками, четверками и т. д.

– Замените произведение суммой: 2•4; 2•5; 4•5; 5•6.

– Составьте из примера на умножение два примера на деление:

4•3=12

5•2=10

– Первый множитель – неизвестное число, второй – 5, значение произведения – 15. Как найти неизвестный множитель?

– Сравните выражения: 9•5 ... 9•6, 6•2 ... 6•3, 5+5+5 ... 5•4, 6•3 ... 6+6+6. Обоснуйте свой ответ.

– Вставьте нужные числа в окошки, чтобы получились верные равенства: 4•5=□•4, 8•□=7•8, 6•□=□•5.

– Обоснуйте целесообразность выполнения данных упражнений при переходе к изучению каждого табличного случая умножения и деления.

5. Почему каждая новая таблица умножения начинается со случая умножения одинаковых множителей?

6. Приведите рассуждения учащихся при нахождении значений следующих выражений. Какова учебная задача данных упражнений?

4•6+4   3•8+3   5•8+5

1.3. Формирование внетабличных устных и письменных вычислительных приемов

План лекции

1. Изучение устных внетабличных вычислительных приемов
2. Алгоритмы письменных вычислений
3. Технологии изучения письменных вычислений

1. Изучение устных внетабличных вычислительных приемов

К устным внетабличным вычислениям относят все вычисления с числами в пределах сотни, кроме табличных, и сводимые к ним вычисления с многозначными числами. Например, нахождение значения выражений 56-24, 59+41, 25•3, 81:27 относят к устным внетабличным вычислениям, поскольку числа в выражениях и результаты вычислений находятся в концентре сотня. Нахождение значения выражений вида 5600-2400, 590+410, 2500•30, 8100:270 – также относят к устным. Вычисления в этих случаях сводятся к операциям над двузначными числами (5600-2400=56сот.-24сот.=32сот.=3200).

К устным относят также вычисления вида 450:15 или 1800*3 и др., поскольку их вычисление сводится к вычислениям в пределах ста. Например, 450:15=45дес.:15=3дес.=30. Предполагается, что ребенок выполняет устные вычисления без обращения к записям в столбик, а вычисляет их устно и запись производит в строчку, используя известные ему правила и законы арифметических действий, знание табличных случаев умножения и деления.

Приведем традиционный порядок изучения устных внетабличных вычислительных приемов сложения и вычитания.

60+20; 50-30 – сложение и вычитание разрядных чисел;

34+20; 34+2 – прибавление однозначного числа или круглых десятков к двузначному числу без перехода через разряд;

26+4 – прибавление однозначного числа к двузначному числу с получением в результате целого десятка, что приводит к увеличению разрядных единиц в разряде десятков;

48-30; 48-3 – вычитание однозначного числа или круглых десятков из двузначного числа без перехода через разряд;

30-6 – вычитание однозначного числа из целых десятков с «заемом» одного десятка;

46+5 – прибавление однозначного числа к двузначному числу с переходом через разряд;

42-5 – вычитание однозначного числа из двузначного числа с переходом через десяток;

40+16; 45+23 – сложение двузначных чисел без перехода через разряд;

40-16 – вычитание двузначного числа из целых десятков с «заемом» десятков;

45-12 – вычитание двузначных чисел без перехода через разряд;

37+48 – сложение двузначных чисел с переходом через разряд;

37+53 – сложение двузначных чисел с получением в результате целых десятков.

К устным внетабличным случаям умножения и деления в пределах 100 относят случаи:

умножения двузначного числа на однозначное число (20•3, 18•3),

деления двузначного числа на однозначное, не входящие в число табличных вычислений (80:4, 96:6),

деления двузначного числа на двузначное в пределах ста (80:40, 96:16).

Рассмотрим особенности формирования умений складывать и вычитать в пределах 100, которые полностью или частично нашли отражение в современных учебниках по математике в начальной школе.

Последовательность рассмотрения устных ВП на сложение и вычитание определяется целями обучения и логикой построения курса, в котором изучение теоретических вопросов подчинено, прежде всего, формированию у детей вычислительных умений и навыков.

Овладение ВП предполагает усвоение табличных случаев сложения, свойств сложения и вычитания: сочетательного и переместительного свойств сложения, вычитания числа из суммы, вычитание суммы из числа.

Основным способом введения ВП является показ образца действия, который демонстрируется на различных моделях (предметной, графической или символической), а затем, закрепляется в процессе выполнения тренировочных упражнений. Например, полная развернутая символическая модель вычислительного приема на прибавление однозначного числа к двузначному может выглядеть так:

37+5=37+(3+2)=(37+3)+2=40+2=42

Процесс формирования вычислительных умений сориентирован на усвоение способа действия для частных случаев сложения и вычитания чисел.

На подготовительном этапе изучение каждого свойства (правила) действия строится примерно по одному плану: сначала, используя при необходимости наглядные пособия или символические записи, раскрывается суть самого свойства, затем, дети учатся применять его при выполнении различных упражнений учебного характера, и, наконец, учатся, пользуясь знанием свойства, «открывать» приемы вычислений с учетом особенностей каждого конкретного случая вычисления.

Другой подход к формированию устных вычислительных умений на сложение и вычитание в пределах 100 нашел отражение в технологии, предложенной Н. Б. Истоминой [24].

Процесс формирования вычислительных умений сориентирован на усвоение общего способа действий, в основе которого лежит осознание детьми записи чисел в десятичной системе счисления (разрядный состав числа) и смысла действий сложения и вычитания.

Основным способом введения нового ВП является выполнение учащимися действий с моделями десятков и единиц и соотнесение этих действий с математической записью.

Наблюдение за изменением в записи чисел после произведенных вычислений сопровождается активным использованием приемов анализа и синтеза, сравнения, классификации, обобщения. Средством организации этой деятельности является система учебных заданий, в процессе выполнения которых учащиеся сами «открывают» способ действия и овладевают вычислительными умениями.

Н. Б. Истомина предлагает в своих учебниках следующие виды заданий:

– наблюдение за изменением результата при увеличении (уменьшении) чисел на определенное число,

– определение признака, по которому составлены пары выражений,

– составление из данных чисел верных числовых равенств, сравнение выражений,

– определение правила, по которому составлены столбики выражений и составление выражений по этому правилу,

– запись чисел в окошечки так, чтобы получились верные равенства,

– нахождение среди данных чисел ответов к данным выражениям,

– нахождение значения данного выражения, используя результаты других выражений.

Для вычислительных приемов на внетабличное умножение и деление используются различные методические приемы. Овладение ВП предполагает усвоение нумерации чисел в пределах 100, табличных случаев умножения (деления), переместительного ($a•b=b•a$), сочетательного ($a•(b•c)=(a•b)•c$) и распределительного свойств умножения ($a•(b+c)=a•c+a•b$), а также свойства деления суммы на число ($(a+b):c=a:c+a:b$) и др.

В начальном курсе математики устные вычисления используются при умножении двузначного числа на однозначное (12•6), при делении двузначного числа на однозначное (81:3) и при делении двузначного числа на двузначное (72:12).

В учебнике М. И. Моро и др. основным способом знакомства с ВП является показ образца действия и его закрепление в процессе тренировочных упражнений. Например, в учебнике второго класса выделы три случая деления двузначного числа на однозначное, каждый из них отрабатывается отдельно.

1) 46:2, 96:3 – разряд десятков и разряд единиц делится на однозначное число, достаточно разложить делимое на сумму разрядных слагаемых,

2) 36:2, 65:5 – в этом случае уже требуется раскладывать делимое на сумму удобных слагаемых, каждое из которых будет

делиться на делитель,

3) 70:2, 96:4 – данный случай уже требует выделения в делимом ближайшего десятка, который будет делиться на делитель.

Для каждого случая дается образец действия:

46:2=(40+6):2=40:2+6:2=23
36:2=(20+16):2=20:2+16:2=10+8=18
70:2=(60+10):2=60:2+10:2=30+5=35
96:2=(80+16):4=80:4+16:4=20+4=24

Ориентируясь на образец, учащиеся выполняют тренировочные упражнения, в процессе которых закрепляются определенные способы действия.

В первом случае делимое представляется в виде суммы разрядных слагаемых и затем используется свойство деления суммы на число.

Во втором случае делимое представляется в виде суммы так называемых «удобных слагаемых».

В последнем случае в качестве одного из слагаемых выступает наибольшее число разрядных десятков, которое делится на данный делитель. Во всех случаях используется свойство деления суммы на число.

В учебнике Н. Б. Истоминой нашел отражение другой подход. Он сориентирован на формирование общего способа действия (т. е. делимое представляется в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых делится на данное число) и на осознании его через организацию проблемной ситуации или проблемного диалога рассматриваются частные варианты этого вычислительного приема. Приведем пример задания из учебника, с помощью которого реализуется данный подход.

1) Вычисли значение выражения 52:4.

Миша: Я думаю, нужно представить 52 в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых делится на 4. В этом случае можно разделить на 4 каждое слагаемое и полученные результаты сложить:

(28+24):4=28:4+24:4=7+6=13

(20+32):4=20:4+32:4=5+8=13

Подумай, какие еще выражения можно составить по этому правилу.

2) Догадайся! Как рассуждал Миша, вычисляя значения выражений:

72:6=(60+12):6=…

Учащимся предлагаются следующие виды упражнений:

– определение правила, по которому составлены пары выражений,

– сравнение выражений,

– определение правила, по которому составлены столбики выражений и составление выражений по этому правилу,

– запись чисел в окошечки так, чтобы получились верные равенства,

– определение признака классификации при разбиении выражений на группы.

2. Алгоритмы письменных вычислений

Письменные вычисления обладают следующими отличительными свойствами:

– вычисления начинаются с единиц меньшего разряда (исключением является письменное деление);

– промежуточные результаты вычислений записываются;

– имеют особую форму записи, называемую «запись в столбик».

Осваивая письменные вычисления, учащиеся должны уметь:

– давать характеристику вычислительному приему (название, теоретическую основу, алгоритм вычислений, базовые знания);

– знать и уметь выполнять запись и применять алгоритм письменного сложения, вычитания, умножения и деления для всех частных случаев письменных вычислений;

– выполнять проверку выполненного действия.

Рассмотрим алгоритмы письменных вычислений.

Алгоритм письменного сложения состоит из 4-х основных операций:

– объяснение того, как подписывают числа при письменном сложении;

– указания, с единиц какого разряда начинаются вычисления;

– операции определения числа цифр в результате;

– выполнение вычислений с единицами в каждом разряде.

Алгоритм дается (или открывается детьми через проблемную ситуацию) учащимся первый раз в развернутом виде на конкретном примере. После первичного закрепления по частям алгоритм сокращается, «свертывается».

Пример развернутого алгоритма письменного сложения.

Чтобы вычислить значение выражения 729+346, второе слагаемое подписываем под первым так, чтобы каждый разряд второго слагаемого был под соответствующим разрядом первого; между числами ставим знак плюс, а под вторым слагаемым проводим черту, отделяющую результат от данных чисел.

Вычисления начинаем с единиц младшего разряда (разряда единиц).

Определим число разрядов в значении суммы: в разряде сотен будет переполнение разряда (7+3=10), следовательно, значение суммы будет четырехзначным числом; обозначим места будущих цифр в значении суммы точками.

$+\,7\;2\;9$

346

••••

Вычисляем: складываем единицы в разряде единиц (9+6=15), 5 пишем под разрядом единиц, 1 десяток прибавим к единицам в разряде десятков (запоминаем, что надо прибавить 1 к единицам в разряде десятков). Складываем единицы в разряде десятков (2+4=6), к 6 дес. прибавим 1 десяток, который запоминали, получится 7 десятков; пишем 7 под разрядом десятков. Складываем единицы в разряде сотен (7+3=10), 10 сотен = 1 тысяча; в разряде сотен пишем 0, а в разряде единиц тысяч пишем 1. Значение суммы чисел 729 и 346 равно 1075.

Алгоритм письменного вычитания аналогичен алгоритму письменного сложения.

Осваивая письменное умножение, учащиеся должны уметь:

– называть вычислительный прием, давать ему характеристику;

– правильно выполнять запись в столбик для различных случаев умножения;

– применять алгоритм письменного умножения для различных случаев письменного умножения;

– умножать многозначное число на однозначное;

– умножать числа, оканчивающиеся нулями;

– умножать многозначное число на двузначное;

– выполнять проверку действия умножения.

Алгоритм письменного умножения рассмотрим на примере 123•4.

Чтобы умножить 123 на 4, запишем второй множитель под соответствующим разрядом первого множителя. Между числами поставим знак умножения и под вторым множителем проведем черту, отделяющую выражение от его значения.

$$\begin{array}{r} \times\ 123 \\ \underline{\quad 4} \\ \bullet\bullet\bullet \end{array}$$

Определим число цифр в значении произведения. Для этого умножим единицы в разряде сотен на второй множитель (100•4=400). Переполнения в старшем разряде нет, значит, в значении произведения будет столько цифр, сколько их в первом множителе. Обозначим места будущих цифр в значении произведения точками.

Умножим единицы в разряде единиц (3ед.•4=12ед.) Это 1дес. и еще 2 ед. Запишем 2 в разряде единиц, а 1дес. запомним.

Умножим единицы в разряде десятков (2дес.•4=8дес.), к 8 десяткам прибавим 1 десяток, который запоминали, получим 9 десятков и запишем в результате 9 в разряде десятков.

Умножим единицы в разряде сотен (1сот.•4=4сот), запишем 4 сотни в разряде сотен результата. Значение произведения чисел 123 и 4 равно 492.

Развернутый алгоритм дети используют только на 1-2 уроках, когда он закрепляется по частям, а затем алгоритм сокращается. Запись в столбик полезно давать обучающимся после сравнения двух развернутых записей в строку, одна из которых демонстрирует устное умножение, другая – письменное.

123•4=(100+20+3)•4=100•4+20•4+3•4=400+80+12=492 – устное вычисление.

123•4=(100+20+3)•4=3•4+20•4+100•4=12+80+400=492 – письменное вычисление.

Вторая строка значительно сокращает запись, если ее выполнить в столбик.

Осваивая письменное деление, учащиеся должны уметь:

– называвать вычислительный прием, давать ему характеристику;

– правильно выполнять запись в процессе вычислений;

– определять первое неполное делимое;

– определять число цифр в значении частного;

– проверять, правильно ли подобрана цифра в значении частного;

– образовывать второе, третье и т.д. неполные делимые;

– делить многозначное число на однозначное;

– делить многозначное число на двух-, трехзначное число;

– применять алгоритм деления в тех случаях, когда в значении частного имеются нули;

– делить числа, оканчивающиеся нулями;

– выполнять проверку выполненного действия деления.

Алгоритм письменного деления рассмотрим на примере 522:6.

$$\begin{array}{r|l} 522 & 6 \\ \cline{2-2} & \bullet\bullet \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} -522 & 6 \\ \cline{2-2} \underline{48} & 87 \\ -42 & \\ \underline{42} & \\ 0 & \end{array}$$

Определим число цифр в значении частного. Делитель – однозначное число, значит, первое неполное делимое будет содержать не менее одной цифры. 5 сотен не делится на 6 так, чтобы получилась хотя бы одна сотня, значит, первое неполное делимое будет 52 десятка. Старший разряд в значении частного будет разрядом десятков и в значении частного будет 2 цифры. Обозначим число будущих цифр в значении частного точками.

Подберем первую цифру в значении частного: 52 десятка делим на 6. Можно взять по 8 десятков. Проверим, правильно ли подобрана первая цифра в значении частного.

Узнаем, сколько десятков разделилось (8дес.•6=48дес.)

Узнаем, сколько десятков не разделилось (52-48=4(дес.)). 4 десятка не делится на 6 так, чтобы можно было получить еще хотя бы 1 десяток, значит, первая цифра в значении частного определена верно.

Образуем второе неполное делимое:

4дес.+2ед.=42ед.

Подберем вторую цифру результата: 42:6=7.

Проверим, правильно ли подобрана вторая цифра в значении частного: 7ед.•6=42ед. Все единицы разделились, значит, деление окончено. Значение частного от деления 522 на 6 равно 87.

Наиболее часто встречающиеся ошибки при изучении данной темы – это пропуск нулей в середине или в конце значения частного. Наиболее действенным средством устранения этой ошибки – приучение детей определять число цифр в значении частного перед началом выполнения действия деления и последующая проверка правильности выполнения действия деления действием умножения.

3. Технологии изучения письменных вычислений

В настоящее время существует две технологии (два подхода) изучения алгоритмов письменных вычислений. Рассмотрим эти технологии на алгоритме письменного деления.

При первом подходе в основу изучения положено постепенное усложнение изучаемых случаев вычислений, реализуется принцип постепенного перехода от простого вычислительного приема к более сложному приему. При изучении вычислительных приемов каждому новому случаю посвящается отдельный урок, причем этапы алгоритмов как таковые не выделяются и не отрабатываются. Обучающиеся просто запоминают последовательность операций, ориентируясь на образец записи в столбик. В основном используются задания, направленные на отработку нового вычислительного приема в целом. Обучение вычислениям происходит через усвоение алгоритма для каждого отдельного вычислительного приема.

Например, письменное деление сопровождается рассмотрением следующих случаев деления:

1) рассматриваются случаи вида 374:2; 984:4 – первое неполное делимое однозначное число;

2) рассматриваются случаи вида 376:4; 198:6 – первое неполное делимое двузначное число;

3) рассматриваются случаи с нулями в значении частного (на конце или в середине);

4) рассматривается деление чисел, оканчивающихся нулями.

При втором подходе к изучению алгоритмов письменных вычислений в основу положено осмысление каждой операции, входящей в алгоритм на одном из основных случаев деления трехзначного числа на однозначное. Затем идет постепенная отработка смысла отдельных операций алгоритма для всех других случаев письменного деления.

– Выделить операции, входящие в алгоритм письменного деления.

– Выполнить запись в столбик.

– Определить число цифр в результате (выделить первое неполное делимое, определить старший разряд в значении частного, обозначить точками места будущих цифр в результате.)

– Подобрать первую цифру результата.

– Проверить, правильно ли она подобрана (узнать, сколько разрядных единиц разделилось, узнать, сколько разрядных единиц не разделилось, сравнить остаток с делителем).

– Образовать второе неполное делимое и т. д.

Второй подход кардинально меняет систему упражнений, обеспечивающую отработку умения выполнять деление письменно. При этом появляется реальная возможность ориентировать процесс освоения письменного деления не на получение результата, а на поиск путей усовершенствования способа деления для каждого отдельного случая письменного деления, на определение границ применения уже известного алгоритма.

При втором подходе каждая операция, входящая в состав алгоритма, отрабатывается отдельно через специально сконструированную систему упражнений. Рассмотрим некоторые из этих упражнений.

1. Укажите выражения, в которых верно определено первое неполное делимое (оно подчеркнуто):

а) $\underline{4}96:4=$	б) $\underline{28}4:3=$	в) $\underline{12}80:40=$
г) $\underline{15}60:15=$	д) $\underline{3050}40:145=$	е) $\underline{86}40:9=$

2. Запишите, какое из чисел, указанных справа, может быть вторым неполным делимым, если первая цифра в значении частного подобрана верно:

а) 395:5	45, 9, 95;
б) 176:4	7, 76, 16;
в) 855:15	25, 55, 105;
г) 936:26	56, 156, 15.

После отработки каждой операции, входящей в состав алгоритма, ученики в групповой работе, самостоятельно или при минимальной помощи учителя корректируют основной алгоритм, уточняя его для каждого отдельного случая письменного деления.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте характеристику устным и письменным вычислениям.

2. Перечислите операции, входящие в алгоритм письменного сложения и вычитания, умножения и деления.

3. Как вычислили значение выражения 284•4, устно или письменно? Почему так думаешь?

284•4=(200+80+4)•4=200•4+80•4+4•4=800+320+16=1136

4. Перечислите виды устных внетабличных вычислительных приемов, приведите примеры и дайте им полную характеристику.

5. Дайте характеристику вычислительным приемам вида: 42-18; 294+457; 48:16; 123•9; 147:7; 3318:14;

6. Перечислите этапы формирования письменных вычислительных приемов.

7. Охарактеризуйте особенности подходов к формированию письменных вычислений.

Задания для самоподготовки

1. Выполните вычисления и охарактеризуйте вычислительный прием:

408•7 40016•5.

2. Объясните, как правильно записать в столбик выражения:

36•9 432•4 875•304 130•270 7•306.

3. Объясните, почему при умножении чисел, оканчивающихся нулями, удобно выполнять такую запись:

$$\times\begin{array}{r} 3470 \\ \underline{\quad 7} \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 1200 \\ \underline{\ 7} \end{array}$$

4. Сделайте прикидку. Сколько цифр будет содержать значение произведения в каждом выражении?

563•5 123•3 436•4 45•13.

5. Как, не вычисляя значений произведений, выбрать из

чисел, записанных справа, правильные ответы?

3907•7	7904
5429•8	64840
2078•7	14546
8105•8	43432
1976•4	27349

6. Объясните, как выполнено умножение «в столбик»:

$$\begin{array}{r} \times\, 38514 \\ 7 \\ \hline 269598 \end{array}$$

7. Обоснуйте отбор возможных форм организации учебной деятельности детей на каждом этапе формирования вычислительного приема вида «деление многозначного числа на однозначное».

8. Выберите один из вычислительных приемов, укажите этапы формирования этого вычислительного приема, раскройте особенности организации познавательной деятельности детей на каждом из них по одной из технологий обучения.

9. Составьте итоговую контрольную работу по данному разделу. Обоснуйте ее содержание, форму проведения, технологию оценивания и обработки результатов. Продумайте возможные варианты работы над ошибками.

10. Выполните логико-математический анализ изучения темы «Письменное умножение» во втором, третьем, четвертом классах (учебник по выбору студента); определите перечень знаний и умений, которые должны быть сформированы при изучении данной темы. Заполните таблицу.

Перечень вычислительных приемов и последовательность изучения темы	Формируемые знания, предметные и универсальные учебные действия	Теоретическая основа вычислительного приема	Базовые знания	Сопутствующий материал

11. Выполните это же задание по другим учебникам (по выбору). Прокомментируйте различные подходы к последовательности изучения вычислительных приемов на письменное умножение. Определите виды заданий, которые используются в учебниках на этапах:

– подготовки к восприятию вычислительного приема;
– восприятия вычислительного приема;
– осознания и осмысления вычислительного приема;
– закрепления и применения вычислительного приема.

12. Дайте оценку заданиям, которые используются в учебниках по различным УМК при изучении письменного умножения.

13. Выберите по одному заданию из каждого этапа формирования письменного деления, определите их учебную задачу, продумайте методику работы с этими заданиями на уроке.

14. Составьте итоговую контрольную работу по одному из разделов, связанному с формированием внетабличных вычислительных приемов.

15. Обоснуйте ее содержание, форму проведения, технологию оценивания и обработки результатов. Продумайте возможные варианты работы над ошибками.

16. Охарактеризуйте методику работы над типичными вычислительными ошибками на письменное умножение и деление.

17. Составьте конспект урока по ознакомлению детей с письменным делением многозначного числа на двузначное число. Составьте перечень вопросов, с помощью которых можно выявить усвоение детьми данной темы.

18. Сформулируйте алгоритмы письменных вычислений в развернутом и в свернутом виде.

19. Выпишите типы заданий, которые используются авторами учебников при изучении алгоритмов письменных вычислений.

20. Сформулируйте учебную задачу для заданий из учебников на изучение письменного сложения и вычитания. Выберите задания, формирующие у школьников логические универсальные учебные действия: анализ, синтез, обобщение, конкретизация, сравнение, классификация и др.

21. Установите, удовлетворяет ли совокупность заданий, предложенных для осознания и осмысления изучаемого письменного вычислительного приема принципам полноты, непрерывного повторения, вариативности и др.

Глава 2. Изучение алгебраического материала в курсе математики начальных классов

План лекции

2.1. Цели изучения алгебраических понятий в начальной школе

2.2. Изучение числовых равенств и неравенств в курсе математики начальных классов

2.3. Способы решения неравенств с переменной

2.4. Способы решения уравнений в курсе математики начальных классов

2.1. Цели изучения алгебраических понятий в начальной школе

В содержание курса математики в начальных классах входят элементы нескольких разделов математики. Одним из таких разделов является алгебра.

Алгебраический материал впервые был включен в программу по математике в 1969 году. Тогда же была обоснована необходимость использования данного материала для развития мышления младших школьников и возможность детей данного возраста усваивать достаточно абстрактные алгебраические понятия [37].

Обосновывая роль алгебраического материала в курсе математики начальных классов, чаще всего отмечают, что раннее введение элементов алгебры позволяет осуществлять работу по пропедевтике важнейших понятий современной математики, таких как переменная величина, функциональная зависимость. Упражнения с функциональным содержанием помогают учащимся увидеть динамичность явлений реального мира, взаимную обусловленность и связь величин, что оказывает большое влияние на формирование их мировоззрения.

Буквенная символика, вводимая в начальных классах, и связанное с ней понятие переменной содействуют обобщению знаний о числах, свойствах арифметических действий. При этом у школьников раньше, чем обычно, возникают предпосылки к теоретическому рассуждению.

Алгебраический материал способствует расширению арсенала математических средств, используемых школьниками при решении задач, содействуют развитию логических приемов (анализ и синтез, обобщение и конкретизация, индукция и дедукция).

Элементы алгебры в курсе математики начальной школы выполняют, хотя и очень важную, но все же вспомогательную функцию при изучении основного (арифметического) содержания программы.

Алгебраический материал представлен такими понятиями как выражение, равенство, неравенство. В данных понятиях для обозначения чисел используют не только цифры, но и буквы. В результате получаются новые понятия: буквенные выражения (a-7, b+c), уравнения (а•2=14, 8+b=10•4), неравенства с переменной (a+5<12), что позволяет обобщать закономерности, существующие в области арифметики. Например, свойства ряда натуральных чисел, свойства арифметических действий, зависимости между величинами могут быть записаны с помощью буквенной символики. Умение же ученика обобщенно представить некоторое утверждение с помощью буквенной символики (кодирование) или читать общепринятые обозначения, понимать смысл обобщающих знаков, представлять их в словесном утверждении (декодировать) является важным познавательным универсальным действием.

Базовым понятием для алгебры является понятие «выражение» как отражение жизненной ситуации, записанной на математическом языке. Этот тезис важно донести до учащихся на этапе первоначального знакомства с математическими записями.

Жизненная ситуация: «к двум яблокам добавили одно яблоко» может быть записана на математическом языке: «2+1».

Но добавлять к элементам заданного множества элементы другого множества можно в бесконечно большом количестве случаев. При этом может меняться количество элементов во множествах и сами элементы могут быть разного рода. Чтобы отразить это явление в обобщенном виде, его записывают с помощью буквенного выражения ($a+b$). При значениях a=2, а b=1 получаем числовое выражение 2+1, отражающее конкретную ситуацию с яблоками.

Буквенное обозначение чисел в методической литературе называют буквенной символикой. Роль буквенной символики – отражать некоторое обобщенное знание о числах, отношениях и действиях с ними.

В практике начальной школы в качестве обозначений чисел, наряду с цифрами используют малые буквы латинского алфавита.

2.2. Изучение числовых равенств и неравенств в курсе математики начальных классов

Работа с выражениями описана в первой части данного пособия, поэтому начнем рассмотрение алгебраического материала с понятия равенства.

Равенством называют запись, содержащую два выражения, соединенные знаком «=» равно. Равенства бывают верными и неверными. Если значения выражений, стоящих в левой и правой части равенства, совпадают, то равенство считается верным, если нет, то равенство будет неверным.

52+6=64-6 – верное равенство, т. к. 58=58

7•8=6•8 – неверное равенство, т. к. 56≠48

Большинство заданий в математике связано с вычислением значения выражения. Если значение выражения найдено, то результат выполнения вычислительного действия записывают в виде равенства. Например, 3+1=4. Если значение выражения вычислили верно, то равенство называют верным, если неверно, то записанное равенство считают неверным (3+1≠5).

С равенствами дети знакомятся в первом классе одновременно с понятием «выражение», в теме «Числа первого десятка». Осваивая символическую модель образования последующего и предыдущего числа, дети записывают равенства 2+1=3 и 4-1=3. В дальнейшем равенства активно используются при изучении состава однозначных чисел и далее практически с этим понятием связано изучение каждой темы в курсе математики начальной школы. Вопрос о введении понятия «верное» и «неверное» равенство в различных программах решается неоднозначно. В ряде программ это понятие вводят одновременно с записью равенства, в других, при изучении темы «состав однозначных чисел», где используются записи равенства «с окошком» (□+3=5; □+□=5; □+□=□). Подбирая число или несколько чисел, которые можно вставить в окошко, дети убеждаются в том, что в одних случаях получаются верные, а в других неверные равенства. Следует заметить, что данные математические записи с одной стороны позволяют закрепить состав чисел, с другой дают представление о переменной величине и являются подготовкой к введению буквенной символики и получению нового понятия – уравнение.

Процесс сравнения чисел, а затем выражений и обозначение отношений между ними с помощью знаков сравнения «<», «>» приводит к получению числовых неравенств. Числовые неравенства, как и равенства, могут быть верными и неверными. Поскольку отдельно взятое число есть элементарное выражение, то определение неравенства в обобщенном виде может звучать так: «два выражения, соединенные знаком сравнения «больше» или «меньше», называют неравенством».

Для формирования представлений о верных и неверных равенствах и неравенствах при сравнении выражений используется прием вычисления значений выражений и последующего сравнения их значений. Например, детям сообщается правило: «Сравнить выражения – значит сравнить их значения».

Задание: сравните выражения: 21+6 … 23+6.

Выполняя задание, дети рассуждают так.

«Вычислим значение выражений в левой и правой части. 21+6=27; 23+6=29. Сравним значения выражений: 27<29. Вывод. Значит, сумма двадцати одного и шести меньше суммы двадцати трех и шести.

Оформление записи.

$$21+6 < 23+6$$
$$27 < 29$$

Ценным является и другой способ обоснования сравнения выражений. Используя его, дети опираются на свойства действий или правила зависимости изменения результата действия в связи с изменением одного из компонентов. В этом случае, выполняя данное задание, дети могут рассуждать следующим образом. «В первом выражении первое слагаемое больше, чем первое слагаемое второй суммы, а вторые слагаемые в выражениях равны, значит, значение суммы двадцати одного и шести меньше значения суммы двадцати трех и шести».

2.3. Способы решения неравенств с переменной

Традиционно при решении неравенств с переменной использовалось два способа: способ подбора и способ сведения к равенству.

Первый способ называют способом подбора, что вполне отражает действия, производимые ребенком при его использовании. При этом способе значение неизвестного числа подбирается либо из произвольного множества чисел, либо из заданной их совокупности. После каждого выбора значения переменной (неизвестного числа) осуществляется проверка правильности выбора. Для этого в заданное неравенство с переменной вместо неизвестного числа подставляется выбранное значение переменной величины. И далее дети проводят те же рассуждения и записи, которые выполняли с числовыми неравенствами (см. предыдущий параграф). Вычисляется значение левой и правой части неравенства (значение одной из частей может быть элементарным выражением, т. е. числом), а затем, сравнивается значение левой и правой части полученного неравенства. Все эти действия могут выполняться устно или с записью промежуточных вычислений.

Например, «Определи, какие значения может принимать переменная a в неравенстве.»

Второй способ заключается в том, что в записи неравенства вместо знаков «<», «>» ставят знак равенства и получают уравнение. Полученное уравнение школьники решают известным способом. Затем, проводятся рассуждения, при которых используются знания детей об изменении результата действия в зависимости от изменения одного из его компонентов и определяются допустимые значения переменной.

Например, «Определи, какие значения может принимать переменная a в неравенстве $12-a<7$». Решение и образец рассуждений.

Найдем значение a, если $12-a=7$ (свели к равенству и получили уравнение)

Вычисляю, применяя правило нахождения неизвестного вычитаемого: $a=12-7$, $a=5$.

Уточняю ответ: при a равном 5 («корень уравнения равен 5-ти») значение выражения 12-5 равно 7, а нам нужно найти такие значения этого выражения, которые бы были меньше 7, значит надо из 12 вычитать числа большие пяти. Это могут быть числа 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (чем большее число мы вычитаем из одного и того же числа, тем меньше значение разности). Значит, a = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Значения, большие 12, переменная a принимать не может, так как большее число из меньшего вычитать мы не умеем (если не вводятся отрицательные числа).

Пример подобного задания из учебника 3 класса (1-4), авторы: И. И. Аргинская, Е. И. Ивановская [14].

«Реши неравенства, используя решение соответствующих уравнений:

$к-37<29$, $75-c>48$, $a+44<91$.

Проверь свои решения: подставь в каждое неравенство несколько чисел, больших и меньших корня соответствующего уравнения.

Составь свои неравенства с неизвестными числами, реши их и проверь найденные решения.

Предложи свое продолжение задания».

Надо отметить, что ряд технологий и программ обучения, усиливая логическую составляющую и значительно превышая стандартные требования к содержанию математического образования в начальных классах, вводят понятия: «переменная величина», «значение переменной»; понятие «высказывание» (верные и неверные утверждения называют высказыванием), «истинные и ложные высказывания»; рассматривают системы уравнений.

2.4. Способы решения уравнений в курсе математики начальных классов

Равенство, содержащее переменную величину, называют уравнением. Решить уравнение – значит, найти такое значение переменной величины (корень уравнения), при котором уравнение преобразуется в верное числовое равенство. Значение переменной, при котором уравнение преобразуется в верное равенство, называют корнем уравнения. Приведем пример рассуждений.

Дано уравнение:$28+x=34$, Утверждается, что 6 – корень этого уравнения. Проверим наше утверждение.

Подставим в уравнение вместо x его значение 6, получим 28+6=34, выполним вычисления в левой части равенства 28+6=34. Сравним левую и правую части равенства, получим 34=34. Значит наше утверждение верно.

Следует заметить, что приведенные выше рассуждения входят в проверку правильности решения уравнения. И начинать обучать решению уравнений разного вида следует именно с подобных заданий, где дети должны учиться проверять правильно или нет, подобран корень уравнения (значение неизвестного числа). В этом случае в дальнейшем дети не будут игнорировать проверку решения уравнения или выполнять ее формально.

В некоторых программах введение понятия «переменная» не предусматривается. В них уравнение трактуется как равенство, содержащее неизвестное число и далее, решить уравнение, значит, найти такое значение неизвестного числа, при подстановке которого вместо неизвестного получается верное равенство. Это число называют значением неизвестного или решением уравнения. Таким образом, термин «решение уравнения» используется в двух смыслах: как число (корень), при подстановке которого вместо неизвестного числа уравнение обращается в верное равенство, и как сам процесс решения уравнения.

В большинстве программ и систем обучения в начальной школе рассматривают три способа решения уравнения.

Первый способ называют способом подбора, что вполне отражает действия производимые ребенком при его использовании. При этом способе значение неизвестного числа подбирается учащимися произвольно из множества чисел, либо они выбирают его из заданной совокупности чисел. После каждого выбора значения переменной (неизвестного числа) осуществляется проверка правильности решения. Сущность проверки вытекает из определения уравнения и, как мы уже отмечали, сводится к выполнению четырех взаимосвязанных действий:

– в заданное уравнение вместо неизвестного числа подставляется найденное значение;

– вычисляется значение левой и правой части уравнения (значение одной из частей может быть элементарным выражением, т. е. числом);

– сравнивается значение левой и правой части полученного равенства;

– делается вывод о верности или неверности полученного равенства и далее, является ли найденное число решением (корнем) уравнения.

При этом еще на этапе решения уравнений способом подбора в речевую практику вводится понятие «корень уравнения» и сам способ решения называют решением уравнения с помощью «подбора корней».

На первых порах практически выполняется только первое действие, а остальные проговариваются. Этот алгоритм проверки сохраняется для каждого способа решения уравнения.

Второй способ. Ряд авторов учебников и методических рекомендаций для решения простых уравнений используют зависимость между частью и целым. Тогда рассуждения звучат так. В уравнении $8+x=10$; числа 8 и x – части целого; 10 – целое. Чтобы найти неизвестную часть целого можно из целого вычесть известную часть: $x=10-8$; $x=2$. Далее выполняется проверка правильности решения уравнения по выше изложенному плану.

Третий способ решения уравнения опирается на зависимость между результатом и компонентами действия. Из этой зависимости вытекает правило нахождения одного из компонентов. Например, зависимость между значением суммы и одним из слагаемых звучит так: «если из значения суммы двух слагаемых вычесть одно из них, то получится другое слагаемое». Из этой зависимости вытекает правило нахождения одного из слагаемых: «чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из значения суммы вычесть известное слагаемое». Решая уравнение, дети рассуждают так:

Задание: реши уравнение $8+x=11$.

Рассуждения звучат так. В данном уравнении неизвестно второе слагаемое. Мы знаем, чтобы найти второе слагаемое можно из значения суммы вычесть второе слагаемое. Значит надо из 11 вычесть 8. Записываю: $x=11-8$. Вычисляю, 11 минус 8 равно 3, пишу $x=3$.

Далее делается проверка по вышеуказанному алгоритму.

Полная запись решения с проверкой будет иметь следующий вид:

$8+x=11$

$x=11-8$

$x=3$

$8+3=11$

$11=11$

Названным выше способом решаются уравнения с двумя и более действиями со скобками и без них. В таких уравнениях нужно определить порядок действий в составном выражении и, называя компоненты в составном выражении по последнему действию, следует выделить неизвестное, которое в свою очередь может быть выражением на сложение, вычитание, умножение или деление (выражено суммой, разностью, произведением или частным). Затем применяют правило для нахождения неизвестного компонента, выраженного суммой, разностью, произведением или частным, учитывая названия компонентов по последнему действию в составном выражении. Выполнив вычисления в соответствии с этим правилом, получают простое уравнение (или снова составное, если первоначально в выражении было три или более знаков действий). Его решение проводится по уже описанному выше алгоритму. Например.

Задание: реши уравнение $(x+2):3=8$.

Рассуждения. В данном уравнении неизвестно делимое, выраженное суммой чисел x и 2. (В соответствии с правилами порядка действий в выражении $(x+2):3$, действие деления выполняют последним).

Чтобы найти неизвестное делимое, можно значение частного умножить на делитель: $x+2=8\bullet 3$.

Вычисляем значение выражения справа от знака равенства, получаем: $x+2=24$.

Далее получаем уравнение на нахождение неизвестного слагаемого. Рассуждаем как в предыдущем примере.

Полная запись имеет вид:

$(x+2):3=8$

$x+2=8\bullet 3$

$x+2=24$

$x=24-2$

$x=22$

Проверка.

$(22+2):3=8$

$8=8$

В ряде учебников дается алгоритм решения уравнений такого вида.

Найти последнее действие.

Выделить неизвестный компонент.

Применить правило нахождения неизвестного компонента.

Упростить правую часть.

Корень уравнения найден?

Нет　　　　　　　　　　　　Да.

Повторить действия　　　　　Сделать проверку.

С первого пункта.

Данный способ решения уравнений очень полезен для развития мышления, усвоения математической терминологии, пропедевтики функциональной зависимости, но он сложнее предыдущего способа, поскольку требует больше математических знаний и умения выполнять действие в несколько шагов. Достаточно сложно установить алгоритм рассуждений для составных уравнений, где правило взаимосвязи между компонентами и результатом действия применяется многократно. В связи с этим, многие методисты, авторы программ не включают в программу начальных классов по математике знакомство с уравнениями сложной структуры и ограничиваются изучением уравнений следующих видов:

$x+2=6$; $5+x=8$ – уравнения на нахождение неизвестного слагаемого;

$x-2=6$; $5-x=3$ – уравнения на нахождение неизвестного уменьшаемого и вычитаемого соответственно;

$x \bullet 5=20$, $5 \bullet x=35$ – уравнения на нахождение неизвестного множителя;

$x:3=8$, $6:x=2$ – уравнения на нахождение неизвестного делимого и делителя соответственно;

$x \bullet 3=45-21$; $x \bullet (63-58)=20$; $(58-40):x=2 \bullet 3$ – уравнения, где одно или два числа, входящих в уравнение, представлено числовым выражением. Способ решения этих уравнений сводится к вычислению значений этих выражений, после чего уравнение принимает вид одного из простых уравнений выше указанных видов. На наш взгляд это не совсем оправдано, поскольку теряется значимость уравнений для отработки выше названных вопросов математического характера.

Ряд альтернативных программ обучения математике в начальных классах практикуют знакомство детей с более сложными уравнениями, где правило взаимосвязи между компонентами и результатом действия приходится применять многократно и, нередко, требуют выполнения действий по преобразованию одной из частей уравнений на основе свойств математических действий.

Например, для решения предлагаются такие уравнения: $2 \cdot x - 8 + 5 \cdot x = 97$. Решение уравнений такого вида в начальных классах превышает базовый уровень усвоения материала.

Четвертый способ решения уравнений опирается на теоремы о равносильности уравнений и следствия из них. Например, одна из теорем о равносильности уравнений в упрощенной формулировке читается так: «Если к обеим частям уравнения с областью определения X прибавить одно и то же выражение с переменной, определенное на том же множестве, то получим новое уравнение, равносильное данному уравнению».

Из данной теоремы вытекают следствия, которые и используются при решении уравнений.

Следствие 1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим новое уравнение, равносильное данному.

Следствие 2. Если в уравнении одно из слагаемых (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

Таким образом, процесс решения уравнения сводится к замене данного уравнения равносильным, причем эта замена (преобразование) может осуществляться только с учетом теорем о равносильности уравнений или следствий из них. Этот способ решения уравнений является универсальным, с ним детей знакомят в системе Л. В. Занкова [22] и в старших классах.

В методике работы над уравнениями накоплено большое число творческих заданий:

– выбор уравнений по заданному признаку из ряда предложенных уравнений;
– сравнение уравнений и способов их решений;
– составление уравнений по заданным числам;
– изменение в уравнении одного из известных чисел так, чтобы значение переменной стало больше, чем (меньше, чем) первоначально найденное значение;
– подбор известного числа в уравнении;
– проговаривание алгоритмов решения с опорой на блок-схемы решения уравнений или без них;
– составление уравнений по текстам задач и обратно, составление задач по заданной модели уравнения.

Вопросы для самопроверки

1. Какова роль алгебраического материала в курсе математики начальной школы?
2. Какие виды деятельности формируются в процессе изучения данной темы?
3. Какие универсальные учебные действия следует формировать при изучении этой темы?
4. Назовите в порядке возрастающей сложности типы числовых выражений, изучаемых в начальной школе.
5. Охарактеризуйте задания, направленные на подготовку учащихся с понятием переменной.
6. Приведите примеры упражнений, используемых на разных этапах формирования у школьников понятия переменной.
7. Объясните, чем обусловлено использование в начальных классах неравенств с переменной.

8. Какими приемами решения неравенств с переменной должны владеть младшие школьники?

9. Почему понятие «уравнение» в начальной школе вводится в несколько этапов?

10. Какие текстовые задачи решают учащиеся начальных классов с помощью составления уравнения?

11. Расскажите о возможностях формирования у школьников понятий соответствия и функции.

Задания для самостоятельной работы

1. Выполните задания.

– Из чисел 7, 20, 15, 4, 11, 3. Подбери для каждого уравнения такое значение x, при котором получится верное равенство:

$9+x=24$; $17-x=2$; $x-11=9$; $x+5=16$.

Как должен ученик доказывать правильность своего ответа?

– Какое значение может принимать переменная x?

$75+x+x+x=75$;

$38-x-x=36$.

– Реши уравнение: $(y-3)-25-875=110$. Проговори рассуждения ученика.

2. Дополни каждое высказывание так, чтобы оно было верным:

– Если одно из слагаемых _____________, то увеличится и значение суммы.

– Если значение делителя при постоянном делимом уменьшить, то значение частного ______________.

– Увеличение одного множителя при неизменном другом __________ значение произведения.

При изучении какой темы полезно давать такие задания?

3. Реши уравнение. Сформулируй алгоритм решения и проверки правильности решения уравнения $(x+17)\cdot 2=44$.

4. Составь выражения из чисел: 25 и 5. Какие выражения

можно записать, используя однократно (двукратно) эти два числа. Прочитайте эти выражения разными формулировками.

5. Выполните классификацию математических записей, укажите основание классификации и дайте название каждой полученной группе записей: 24+6, 3•(15-5), а•8, 28-(4•2), 12•3, 6, x+5, 14-7, 26-6•2, a+2•3, 18:9, b:6, 38-(15•b), 15:b. Прочитайте записи разными формулировками.

6. Проанализируйте два учебника по математике для начальных классов и ответьте на следующие вопросы.

– В каком классе вводится понятие «числовое выражение» простое и составное, «буквенное выражение», какие приемы и методы при этом используются в каждом учебнике? Какие приемы можно еще использовать для введения понятия «составное выражение»? Какие виды упражнений предлагаются для закрепления вышеуказанных понятий в каждой программе? Определите учебную задачу каждого упражнения, его роль в решении дидактической задачи урока.

– Составьте алгоритм (блок-схему) вычисления значения следующих выражений:

9306:(849-24•35)+101, 270+(4478-1598):144•10.

– Упростите выражения:

24•3+7•24-40, (168:8+21•9):10+7•3.

7. Дайте полное пояснение к решению уравнений:

8-x=25, 75-(x-18):4=64, x:4-5041=3269.

Приведите примеры уравнений, для решения которых в начальных классах необходимо выполнить преобразование в левой или правой части.

8. Проанализируйте два учебника по математике для начальных классов и ответьте на следующие вопросы.

– Какие виды уравнений изучаются в каждом учебнике, в каком классе они вводятся?

– Какие способы решения уравнений используют в каждом учебнике для решения простых и составных уравнений?

– Составьте два составных уравнения, решите их, дайте образцы пояснений к решению уравнений, соответствующие каждой программе обучения.

– Какие методы и приемы используют авторы учебников знакомя детей с простыми и составными уравнениями?

– Составьте последовательность изучения содержательной линии «Решение уравнений» по каждой образовательной программе.

– Какие виды упражнений с уравнениями предлагаются в каждом учебнике? Определите учебную задачу каждого упражнения, его роль в решении дидактической задачи урока.

8. Проведите аннотацию статей с алгебраическим содержанием из журнала «Начальная школа», поступивших в период с 2000 г. Составляя аннотации на статьи, уделите особое внимание современным подходам к обучению младших школьников, опыту учителей, проблемам и стратегии развития.

9. Разработайте фрагмент урока изучения нового материала с созданием проблемной ситуации по материалам данной темы.

Глава 3. Изучение геометрического материала в курсе математики начальных классов

План лекции

3.1. Цель и задачи введения геометрического материала в курс математики

Введение геометрического материала в курс математики начальных классов позволяет более полно реализовать цели, обозначенные в примерной программе по математике, разработанной на основе образовательного стандарта второго поколения.

Изучение элементов геометрии в начальной школе направлено на достижение следующих целей.

– Развитие основ логического мышления, плоскостного и пространственного воображения, математической речи и аргументации.

– Воспитание критичности мышления, интереса к умственному труду, стремления использовать знания в области геометрии в повседневной жизни.

– Понимание роли геометрических величин в повседневной жизни, знание способов их измерения.

– Обеспечение готовности к продолжению образования в области геометрии.

– Задачи изучения геометрического материала в начальных классах.

– Уточнение и обобщение геометрических представлений, полученных в дошкольном возрасте.

– Обогащение геометрических представлений школьников о многообразии объемных и плоских фигур, формирование основных геометрических понятий (фигура, плоскостные и пространственные фигуры, основные виды плоскостных и пространственных фигур, их иерархическая связь между собой и т. д.).

– Выработка у учащихся практических навыков измерения и построения геометрических фигур с помощью измерительных и чертежных инструментов.

– Подготовка к изучению систематического курса геометрии в основном звене школы.

3.2. Содержание геометрического материала в начальных классах

Основное содержание обучения геометрическому материалу в примерной программе представлено двумя крупными разделами «Пространственные отношения. Геометрические фигуры» и «Геометрические величины». Знания, полученные в процессе изучения геометрического материала, используются в других разделах программы по математике в начальных классах, в том числе в разделе «Работа с данными».

Раздел «Пространственные отношения. Геометрические фигуры» предполагает освоение следующего материала.

– «Взаимное расположение предметов в пространстве и на плоскости (выше – ниже, слева – справа, сверху – снизу, ближе – дальше, между и пр.); распознавание и изображение геометрических фигур: точка, линия (кривая, прямая), отрезок, ломаная, угол, многоугольник, треугольник, прямоугольник, квадрат; различение окружности и круга, построение окружности с помощью циркуля.»

– Знакомство с геометрическими телами, их распознавание и называние: куб, шар, параллелепипед, пирамида, цилиндр, конус.

Во второй раздел «Геометрические величины» включены две основные величины «длина» и «площадь», их измерение.

В стандарте это выделено следующим образом.

– «Длина. Единицы длины (миллиметр, сантиметр, дециметр, метр, километр). Измерение длины отрезка. Периметр. Вычисление периметра треугольника, прямоугольника, квадрата. Площадь. Единицы площади (квадратный сантиметр, квадратный дециметр, квадратный метр). Измерение площади геометрической фигуры. Вычисление площади прямоугольника».

Изучение геометрического материала тесно переплетается с содержанием других разделов математики в начальных классах. В разделе «Работа с данными» школьники осуществляют сбор и представление информации, связанной с измерением величин, фиксируют результаты сбора данных в таблице, учатся читать и заполнять таблицы, интерпретировать данные в таблице значения величин. Построение и чтение диаграмм: столбчатой, круговой, также требует хорошего владения геометрическими построениями. Традиционно в первом классе геометрический материал служит в качестве счетного материала и широко используется для построения различных моделей.

Многие основные виды учебной деятельности, перечисленные в стандарте, формируемые в процессе изучения геометрического материала, обеспечивают развитие познавательных, регулятивных универсальных учебных действий. Перечислим ряд из них.

– Моделирование ситуаций, требующих упорядочения геометрических объектов (по длине, вместимости, расположению в пространстве), описание образов явлений и событий с использованием геометрических величин.

– Обнаружение моделей геометрических фигур в окружающем пространстве.

– Анализ и разрешение житейских ситуаций, требующих умения находить геометрические величины (планировка, разметка), выполнять построения и вычисления, анализировать зависимости.

– Планирование хода решения задачи, выполнения заданий на измерение, вычисление, построение.

– Сравнение разных способов вычислений, решения задач с геометрическими величинами, выбор удобного способа их решения.

– Прогнозирование результата вычисления, решения задачи, пошаговый контроль правильности и полноты выполнения плана решения текстовой задачи с геометрическим содержанием, построения геометрической фигуры.

– Способность проводить исследование предмета, явления, факта с точки зрения его математической сущности (числовые характеристики объекта, форма, размеры, продолжительность, соотношение частей, взаимное расположение и пр.).

– Сбор, обобщение и представление данных, полученных в ходе самостоятельно проведенных измерений, опросов.

– Поиск необходимой информации в учебной и справочной литературе.

Все вышеперечисленные виды учебной деятельности призваны обеспечить достижение необходимого уровня геометрического развития ребенка к концу обучения в начальной школе и его успех в освоении систематического курса геометрии в старших классах.

Включение сравнительно большого объема геометрического материала в курсе математики начальной школы объясняется двумя основными причинами:

– работа с геометрическими объектами позволяет активно использовать наглядно-действенный, наглядно-образный и наглядно-логический уровни мышления, которые наиболее близки младшим школьникам, опираясь на которые дети выходят на высшую ступень в своем развитии – словесно-логический уровень;

– увеличение объема изучения геометрического материала в начальных классах, особенно связанного с объемными фигурами, способствует более эффективной подготовке учеников к изучению систематического курса геометрии, что позволяет снизить у школьников основного и старшего звена школы существенные трудности, возникающие при изучении геометрии;

– еще в шестидесятые годы прошлого столетия А. М. Пышкало [37] была доказана возможность более глубокого изучения геометрического материала учащимися начальной школы. Им же были разработаны уровни мышления в области геометрии, которые условно стали называть уровнями геометрического развития.

3.3. Уровни развития мышления в области геометрии

Во второй половине 20 века психологами и педагогами осуществлена попытка более глубоко проникнуть в процесс геометрического мышления, раскрыть и выяснить его специфику.

Процесс развития геометрического мышления полностью не отражается этими уровнями, однако, они позволяют из большого комплекса сложных и взаимосвязанных факторов, характеризующих особенности развития мышления вообще, выделить и, в некоторой степени изолировано, рассматривать существенные стороны геометрического мышления.

А. М. Пышкало [37] выделяет 5 уровней геометрического мышления. На первом уровне геометрические фигуры воспринимаются учащимися как единое целое. Они не видят частей фигуры, но легко узнают эти фигуры и легко запоминают их названия.

На втором уровне ребёнок начинает различать элементы фигур и устанавливать отношения между ними. Формируются такие приёмы умственной деятельности как: отождествление, сравнение, анализ и синтез, классификация, аналогия, обобщение.

На третьем уровне учащиеся начинают устанавливать связи между свойствами фигур и самими фигурами. Осознаётся возможность определения вида фигуры по её свойствам. Основная учебная деятельность направлена на формирование устойчивого интереса к изучению геометрии и потребности к логическим обоснованиям.

На четвёртом уровне обучающиеся понимают значение дедукции как способа построения геометрической теории, осознают роль и сущность аксиом, определение теорем, логической структуры доказательства.

На пятом уровне идёт осознание возможности построения геометрической теории на основе полу формальной аксиоматики.

Каждому уровню геометрического мышления соответствует свой язык, своя символика и своя цепь отношений, связывающая их. Переход от одного уровня к следующему связан с расширением языка и не является процессом самопроизвольным, идущим одновременно с биологическим развитием человека и зависящим от его возраста. Развитие более высокого уровня геометрического мышления протекает в основном под влиянием обучения, а поэтому зависит от содержания и методов этого обучения.

Но никакая методика не позволяет перескакивать через уровни. Переходы осуществляются постепенно и последовательно. При этом элементы более высокого уровня зарождаются «внутри» предшествующего. Причем и после перехода на другой уровень мы часто возвращаемся к более низкому уровню с целью обеспечения лучшего понимания вопросов, изучаемых на новом уровне.

3.4. Принципы формирования геометрических представлений в начальных классах

Современную стратегию обучения геометрии определяют принципы фузионизма, преемственности, наглядности и личностно-ориентированного обучения.

Учитывая современные взгляды на последовательность формирования пространственных отношений и представлений о геометрических фигурах, необходимо формировать их «сверху вниз», т. е. процесс формирования геометрических фигур полезно осуществлять в направлении от пространственных форм и пространственных отношений к плоскостным, как естественным составляющим пространственных (принцип фузионизма). В связи с этим уже в первом классе полезно рассмотреть объемные фигуры во взаимосвязи с плоскостными и получать плоские фигуры как проекции объемных, тем более что это можно наглядно продемонстрировать, применяя информационные технологии.

Реализация этого принципа продиктована осознанием того парадоксального положения, что, существуя реально в трехмерном пространстве, ученики на протяжении первых девяти лет обучения в школе на уроках математики работают с фигурами двухмерного пространства. При этом теряется способность к пространственному воображению и мышлению, что создает для большинства школьников непреодолимые препятствия при изучении курса стереометрии в старших классах.

Принцип фузионизма помогает детям познать мир во взаимосвязи анализа и синтеза, как методов мышления, именно поэтому начинать вводить элементы геометрии нужно с объемных фигур, а плоские рассматривать, как элементы объемных фигур.

В современных учебниках математики для начальной школы, изучение элементов геометрии начинается с первого класса, где предусматривается работа с объемными телами, как в виде реальных предметов, окружающих учеников в трехмерном пространстве, в котором они существуют, так и в виде рисунков, картин, графических и специально изготовленных моделей пространственных фигур – цилиндра, конуса, шара, призмы, пирамиды.

Изучение геометрического материала в начальных классах должно протекать с учетом принципа преемственности в изучении материала, т. е. строиться с учетом знаний, полученных детьми в дошкольном детстве, и с ориентацией на то, что будет изучаться в старших классах. Полезно опираться на запас имеющихся у детей терминов и проводить работу по раскрытию их научного содержания, т.е. выявлять их существенные признаки, учить узнавать фигуру не только по ее наглядному образу, но и по совокупности существенных признаков. Для этой цели хороши упражнения с использованием логической операции подведения под понятие (пример смотри ниже). Кроме того, включая геометрический материал в курс математики, надо своевременно формировать измерительные навыки и представления о геометрических фигурах необходимые для использования на смежных дисциплинах (технология, окружающий мир и т. д.).

Геометрия, как и любой другой учебный предмет в начальных классах, не может обходиться без наглядности. Никакое отвлеченное сознание невозможно, если ему не предшествует обогащение сознания нужными представлениями. Формирование у школьников отвлеченного мышления требует с первых школьных шагов начинать предварительное пополнение их сознания конкретными представлениями. Именно из жизни должен черпаться конкретный материал для формирования наглядных геометрических представлений.

Реализация принципа наглядности в начальной школе связана с обогащением непосредственного, чувственного опыта детей, практическим изучением конкретных свойств объектов, что создает условия для перехода к абстрактному мышлению. Наглядность есть опора для самостоятельного учения и систематизации изученного. В начальных классах при изучении геометрического материала средства наглядности разнообразны: предметы и явления окружающей действительности, действия учителя и учеников, изображения реальных предметов, процессов (рисунков, картины), модели предметов

Как отмечает И. В. Шадрина [53] реализация принципа наглядности в начальном геометрическом образовании не может сводиться только к занимательным картинкам, даже если они и вносят в процесс познания эмоциональные эффекты. Принцип наглядности при обучении математике может быть реализован только с помощью специальных средств: предметных, графических, символических. Например, лист бумаги может служить моделью поверхности, а ее сгиб – моделью отрезка. Необходимость расширения и уточнения используемых средств наглядности в начальном математическом образовании связана, в частности, с трудностями изучения геометрии в основной школе, когда язык абстрактной «картинки» с трудом воспринимается школьниками по причине недостаточности соответствующего познавательного и практического опыта.

Основные функции наглядных пособий заключаются в том, чтобы помочь раскрыть содержание и объем новых понятий, закрепить изучаемый материал или же быть средством контроля, обеспечить активную самостоятельную деятельность учащихся.

Для более эффективной работы над учебным материалом необходимо применение различных средств наглядности. Полезно использовать красочный материал, настенные таблицы, иллюстративные наборные полотна, компьютерные технологии. Наглядное обучение должно обеспечить формирование у учащихся первичных обобщений и установление простых связей, способствовать движению мысли от жизненных наблюдений к сущности изучаемого понятия. В решении этих задач неоценимую помощь могут оказать различные виды учебного оборудования и чертежи.

Самым распространенным видом наглядности должен стать чертеж учителя на доске. Чертеж, выполненный постепенно, в присутствии учащихся, обладает более высокой эффективностью, чем готовый чертеж на слайде. Во время выполнения чертежа учащиеся получают возможность внимательно следить за объяснением учителя, пояснениями к чертежу. Заранее выполненный чертеж менее эффективен, хотя и требует меньших затрат времени. На втором уровне развития мышления в области геометрии заметно повышается роль геометрического чертежа. Геометрический чертеж постепенно становится основным средством наглядности при оперировании геометрическими фигурами.

В процессе формирования геометрических представлений перспективным следует считать метод моделирования. Доказана доступность метода моделирования даже для дошкольников. В связи с этим, уже в самые первые дни изучения геометрического материала, полезно учить детей определять геометрическую форму предметов из реального мира и схематично изображать их в виде геометрических фигур той же формы. Усложняя это задание, полезно учить располагать на бумаге предметы с учетом их реального расположения.

Изучение геометрического материала в начальных классах идет на уровне представлений. При их формировании преимущественно используются вещественная, графическая наглядность и практическая деятельность учащихся. В самом начале 1 класса (первый уровень развития мышления в области геометрии), основным средством наглядности является конкретная вещь или вещественная модель.

В практической деятельности учителей вещественная модель некоторых геометрических фигур обычно представляется так, как это описано в таблице.

Изучаемая фигура	Вещественная модель фигуры
Точка.	Ставим кончик мела на доску, в тетради – острие ручки и получим след – это и есть условное наглядное изображение точки.
Линия.	След мела на доске, карандаша на бумаге, нитка на столе – модель линии.
Кривая линия.	Двое свободно держат нить за концы и она провисает.
Прямая линия.	Двое натягивают нить – получаем представление о прямой (концы нити уходят далеко-далеко!).
Луч.	Отрежем натянутую нить и получим начало, а конец уходит далеко-далеко.
Отрезок.	Отрежем часть натянутой нити в двух местах и получим отрезок.
Ломаная.	Берем мягкую проволоку в виде отрезка и в нескольких местах сгибаем. Получим ломаную линию.
Замкнутая линия.	Соединяем концы этой проволоки и получим замкнутую линию.
Незамкнутая линия	Разъединяем концы, получаем незамкнутую линию.

На уроках математики в начальной школе полезно широко применять пособия-аппликации (таблицы с подвижными и съемными деталями), магнитные доски и т. д. Эти наглядные пособия дают возможность ученикам выполнять задание практически, работая руками.

Таким образом, наглядность, чувственное восприятие и практическая деятельность детей являются основой осознанного усвоения геометрических знаний, лучшим средством развития мышления детей.

Реализация принципа личностно-ориентированного обучения в процессе изучения геометрического материала в начальной школе предусматривает учет опыта ребенка, в том числе и возможностей психической организации ребенка. Личностный опыт начинает формироваться с первых дней жизни ребенка при его взаимодействии с пространством. В школу ребенок приходит с уже определенным видением пространственных отношений, геометрических форм, умением ориентироваться в пространстве, опытом жизнедеятельности, который включает предметы, представления, понятия, операции, приемы, эмоциональные коды. Противоречие между сложившимся опытом ребенка и приобретаемым опытом в области геометрии – есть движущая сила геометрического развития.

Значимость личностного опыта в процессе познания при решении геометрических задач трудно переоценить, поскольку перевод информации, полученной извне каждый делает согласно своему опыту, т. е. любую информацию, как и оценку действий, и их прогнозирование, школьник переводит на «свой язык» на основе имеющегося опыта. Какой образ создаст ученик по определению – неизвестно, но именно он будет «работать» при решении соответствующих задач. Поэтому вербального описания геометрических понятий и их изображений при введении понятия недостаточно, если нет уверенности в адекватном «переводе» их учениками на «собственный язык». При обучении необходимо выявлять насколько образы, созданные учеником, адекватны соответствующим геометрическим понятиям.

Основная задача учителя, работающего в личностно-ориентированной педагогике, – помочь ученику научиться связывать изучаемое понятие с образами, входящими в его личностный опыт, а в случае их отсутствия организовать условия для их образования, т. е. научиться подбирать собственную модель (модели) понятия. Это требует выявления сложившегося опыта учащихся для работы с ним в дальнейшем в двух направлениях.

– При расхождении жизненных и научных геометрических понятий необходимо, как мы это уже подчеркивали, организовать практическую деятельность (основа формирования образов), в которой ученик может создать образы, адекватные геометрическому понятию.

– Если представление ученика соответствует научному геометрическому понятию, то на него надо опираться и предоставлять ученику, самостоятельно конструировать определение, выбрав из существенных свойств понятия минимальный его набор, который и будет задействован в определении. Как показывает практика, ученик выбирает ту совокупность свойств, которую он лучше воспринимает.

3.5. Подходы к изучению геометрического материала в начальных классах

Геометрический материал в начальных классах не должен рассматриваться как приложение к основному курсу арифметики, а изучаться как самостоятельный раздел математики, направленный на формирование пространственных представлений, воображения и геометрическую пропедевтику. В связи с этим для изучения геометрического материала должны отводиться как часть урока (первый, второй классы), так и целые уроки (второй – четвертый классы). Заметим, что второй вариант примерной программы по математике значительно расширяет содержание геометрического материала, подлежащего изучению в начальных классах, и отводит большее число часов на изучение этого раздела.

Исторически развитие геометрических понятий шло от геометрии измерений к геометрии формы. Усвоение геометрического материала более успешно идет в обратном порядке от формы к измерению. В связи с этим в начальных классах полезно вести целенаправленное изучение большого числа геометрических объектов, не связывая эту работу только с измерением. Измерения должны следовать за изучением формы геометрических фигур.

Процесс обучения элементам геометрии, как, впрочем, и другим разделам математики, должен осуществляться с опорой на данные психологической науки, как базы, позволяющей реализовывать личностно-ориентированный подход к обучению.

Поскольку развитие пространственного мышления является одной из приоритетных задач изучения геометрического материала в начальных классах, то полезно актуализировать условия организации деятельности школьников, обеспечивающие создание пространственного образа фигуры, адекватного изучаемому объекту, разработанные Н. С. Подходовой [34].

Следуя этим рекомендациям, знакомство с новой объемной фигурой полезно начинать с предъявления школьникам вещественных (материальных) моделей фигуры, в которых будут меняться несущественные для данной фигуры признаки (цвет, размер, материал). Можно предложить учащимся самостоятельно изготовить, например, из пластилина разного цвета, модель фигуры, что послужит основой для выделения существенных и несущественных свойств фигуры. Поскольку основой формирования образов является активное осязание, осуществляемое в данном случае через деятельность рук, то при рассмотрении вещественной модели фигуры следует активно включать движение по модели рукой, по возможности не отрывая ее от поверхности модели, рассматривать ее в разных положениях.

Следующий шаг предполагает создание «воздушных» моделей, когда одна рука как бы держит модель, фиксируя одну из его поверхностей, а другая изображает непрерывным движением остальные его поверхности.

Проверить правильность изображений формируемого образа фигуры можно через рисование, конструирование, лепку или аппликацию, выполняемую обучающимися.

При изучении геометрических фигур следует достаточное внимание уделять их построению и выработке измерительных навыков. В связи с этим нужно учить пользоваться чертежными инструментами линейкой, циркулем, формировать представление о точности измерений.

Знакомство с измерениями полезно начинать, используя старинные меры длины: локоть, пядь, ладонь, шаг, вершок; предлагать задания на сравнение точности измерений с помощью зрения и осязания. При этом каждый ученик выявляет, какой способ измерения у него более точен.

Развивая глазомер, числовое значение измеряемых объектов полезно определять сначала на глаз, а затем, подтверждать предполагаемые результаты измерением соответствующими для данной величины инструментами.

Построение фигур полезно предварять построениями данной фигуры «от руки», «на глаз». А затем, при необходимости, провести построение с помощью инструментов. Полезно сравнить оба изображения, уточнить недостатки и причины их возникновения.

И в заключении следует напомнить о важнейшем условии, влияющем на эффективность любой деятельности младших школьников, в том числе и на развитие деятельности, связанной с геометрическим материалом. Речь идет об эмоциональном самочувствии школьников в процессе вышеописанной деятельности. Именно эмоциональная составляющая определяет процессы запоминания, устойчивости мотивации, формирования личностно-значимых знаний.

Итак, изучение геометрической фигуры полезно осуществлять, придерживаясь следующей последовательности.

1. Выделение фигуры из множества других геометрических фигур.
2. Введение или уточнение названия фигуры.
3. Распознавание объектов (в окружающей обстановке и по воображению), сходных по форме с выделенной фигурой.
4. Выделение всевозможных свойств изучаемой фигуры.
5. Отделение существенных свойств от несущественных. Фиксирование существенных свойств фигуры.
6. Распознавание модели фигуры, представленной в разных ракурсах.
7. Построение фигуры (при необходимости знакомство с ее разверткой, изготовление развертки).
8. Закрепление существенных свойств понятия через выполнение упражнений, реализующих две логические операции: анализ и синтез.
9. Подведение под понятие, т.е. выполнение заданий, позволяющих определить, относится данный предмет к понятию или нет.

Например: «В конверте лежит фигура, у которой четыре прямых угла. Будет ли эта фигура квадратом?». Учащиеся должны высказать свое предположение в утвердительной или отрицательной форме и обосновать свой ответ, проверяя наличие всех свойств квадрата у фигуры, лежащей в конверте, последовательно отмечая знаком «+» наличие свойства и знаком «-» отсутствие такового, знаком «?», если ничего неизвестно о наличии того или иного качества.

Существенные свойства квадрата.

1. Наличие 4-х прямых углов +
2. Наличие 4 равных сторон –

Вывод: нельзя однозначно утверждать, что фигура, лежащая в конверте, есть квадрат, так как в условии задачи ничего не сказано о наличии второго свойства квадрата.

10. Выведение следствия из факта принадлежности заданной фигуры к данному понятию, т. е. выполнение заданий, позволяющих на основе знания существенных признаков назвать предмет, отнести его к тому или иному понятию, использовать его признаки при решении задач.

Например, «Огород имеет квадратную форму. Его обнесли забором, длина которого равна 64 метрам, какова площадь этого огорода?» Решение этой задачи требует знания существенного свойства квадрата – равенство длин четырех сторон. Опираясь на данное свойство, находим длину стороны квадрата (64:4=16 (м)). Далее используем формулу для нахождения площади квадрата и получаем ответ на вопрос задачи (16•16=256 (кв. м)).

Обобщая выше сказанное, можно отметить, что обучение младших школьников элементам геометрии должно учитывать современные достижения в этой области психологии, педагогики и методики обучения, реализуя следующее положение: обучение должно соответствовать естественному ходу развития геометрических представлений детей, а значит, изучать свойства геометрических фигур необходимо на основе принципов, обозначенных в начале главы.

3.6. Виды геометрических заданий и методика работы над геометрическим заданием определенного вида

В начальных классах используются следующие виды задач с геометрическим содержанием.

1. Задачи на составление фигур.

Сюда входят такие задания.

– Из счетных палочек постройте треугольник, четырехугольник (1 класс).

– Используя чертеж, начерти два таких треугольника и составь четырехугольник. Начерти и вырежи два таких же четырехугольника. Составь из них прямоугольник и найди сумму длин его сторон (2 класс).

– Используя чертеж, начерти и вырежи такие прямоугольники. Затем, сложи из них квадрат (3 класс).

– Рассмотри рисунок и расскажи, как из двух равных квадратов или их частей сложили:

1) один прямоугольник;
2) один квадрат;
3) один треугольник (3 класс).

Методика решения этих задач основана на практической деятельности детей, предложенной в задании. Эти задания развивают у учащихся внимание, восприятие и воображение. Следуя требованиям стандарта, полезно сопровождать эту работу высказываниями детей о том, как они выполняли эту работу, какие ориентиры выбирали для точного выполнения работы, сразу все получилось правильно или пришлось вносить коррективы, в чем была ошибка и т. д.

2. З а д а ч и н а д е л е н и е ф и г у р н а з а д а н н ы е ф и г у р ы.

К таким задачам можно отнести упражнения следующего характера.

– Найди на каждом чертеже отрезок, который делит заданный четырехугольник:

1) на два четырехугольника;

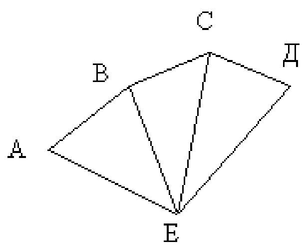
2) на четырехугольник и треугольник.

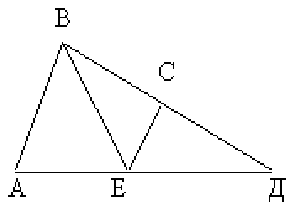
– Покажи, как провести в каждой из данных фигур один отрезок так, чтобы получился квадрат. Найди площадь каждого из полученных квадратов.

При решении подобных задач учащиеся пользуются приемами перебора, подбора, соотнесения результата с заданием, используя для обведения контура полученных фигур фломастеры разного цвета.

3. З а д а ч и н а р а с п о з н а в а н и е г е о м е т р и ч е с к и х ф и г у р.

Сюда относятся задачи с взаимопроникающими элементами, в т.ч. задания вида: рассмотри данные фигуры.





1) Назови многоугольники, не содержащие угол А.

2) Назови многоугольники, содержание угол Д.

3) Выпиши названия фигур, для которых отрезок СД является общей стороной.

Задачи на распознавание фигур являются частью задач на деление фигур, т.к. всякое деление фигуры на заданные фигуры начинается с распознавания в воображении.

Изучению взаимного расположения фигур относительно друг друга, рассмотрению новых фигур, которые должны получаться в результате пересечения или объединения данных фигур, выяснению факта принадлежности одной фигуры другой должно уделяться значительное место. Например: дан рисунок и вопрос: «Какие фигуры получились в результате пересечения двух прямоугольников? Назвать точки, которые принадлежат (не принадлежат) окружности». Совокупность таких упражнений хорошо представлена в учебниках математики по системе Л. В. Занкова [22], где предусматривается выполнение упражнений на:

- сравнение фигур;
- выбор сходных фигур;
- выделение фигур из сложного чертежа;
- складывание равносоставленных фигур;
- преобразование фигур.

4. Задачи на нахождение суммы длин сторон многоугольника (ознакомление с периметром)

В подготовительный период, без сообщения термина периметр, решаются задачи на нахождение суммы длин сторон треугольника, прямоугольника, квадрата и произвольного многоугольника. Используя соответствующий рисунок или модель, учащиеся измеряют длины сторон фигур практическим способом, используя циркуль или линейку.

Для знакомства с периметром прямоугольника в учебниках математики для начальных классов рассматриваются различные способы. Например, для прямоугольника со сторонами 4 см и 3 см сумму длин всех его сторон сначала записывают так: 4+3+4+3=14 (см). Из этого чисто математически получают следующие равенства:

4+4+3+3=14 (см);

$4 \cdot 2+3 \cdot 2=14$ (см);

$(4+3)+(4+3)=14$ (см);

$(4+3) \cdot 2 = 14$ (см).

После такой работы вводится термин «периметр прямоугольника» и формулируется способ его нахождения.

Ряд технологий предусматривают введение формулы

$P=(a+b) \cdot 2=a \cdot 2+b \cdot 2$

Если учитель выбрал этот теоретический вариант, то истинность утверждений надо подтвердить через организацию практической деятельности, подтверждающей возможность и справедливость таких преобразований.

В зависимости от уровня знаний учащихся учитель может выбрать любой из этих вариантов.

При нахождении периметра квадрата обычно делается вывод, что сумму длин сторон квадрата можно заменить умножением длины стороны на число 4 ($P=a \cdot 4$).

Можно этот вывод продемонстрировать через преобразование формул, отражающих периметр прямоугольника, в формулу на нахождение периметра квадрата.

Если $a=b$, то $(a+b) \cdot 2=(a+a) \cdot 2= 2a \cdot 2=4a$.

5. Задачи на построение с помощью циркуля и линейки.

Одной из важных задач геометрии является построение фигур с заданными параметрами при помощи чертежных инструментов. В начальных классах в основном рассматриваются только построения, которые можно выполнить с помощью циркуля и линейки.

Кроме задач на построение простейших геометрических фигур (прямая, отрезок, луч, прямоугольник, квадрат, окружность), в 3-м классе с обучающимися можно рассмотреть следующие задачи на построение фигур с помощью циркуля и линейки:

– построение прямого угла и деление отрезка пополам;
– построение треугольника с двумя равными сторонами;
– построение треугольника по трем заданным сторонам;
– построение прямоугольника (квадрата) используя окружность.

Задачи на построение – самые древние математические задачи, они помогают лучше понять свойства геометрических фигур, способствуют развитию графических умений.

Обязательного усвоения этих построений требовать от всех учащихся нецелесообразно. Их следует предлагать как дополнительный материал. В этом случае методика обучения может быть сведена к чтению текста задания и построения фигур совместно с учителем, выполнению соответствующих действий первоначально вслед за ним, а затем по словесным указаниям. К этим задачам учащиеся более подробно возвращаются в 5-6 классах. Но возможен и вариант, предусматривающий организацию групповой работы по поиску алгоритма построения той или иной фигуры с помощью циркуля и линейки. В любом случае дети должны быть знакомы с содержание этапов решения задач на построение.

Рассмотрим этапы решения задачи на построение.

Анализ. На этапе анализа содержания задачи осуществляется поиск ее решения. Конечная цель анализа – установление алгоритма построения, состоящего из основных или элементарных действий, приводящих к построению искомой фигуры. Как и решение геометрической задачи на вычисление или доказательство, поиск такого алгоритма сопровождается чертежом, иллюстрацией, помогающими установить связи и зависимости между данными и искомыми фигурами.

Построение. Этот этап решения представляет собой воплощение чертежа, т. е. непосредственную реализацию алгоритма – найденной последовательности действий с помощью выбранных инструментов построения.

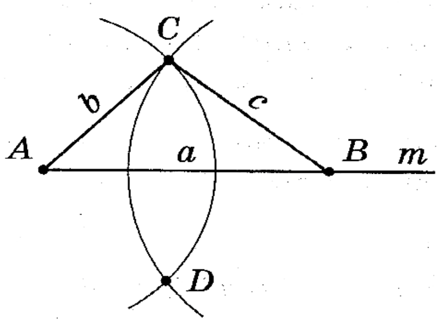
Доказательство. Его цель – доказательство того, что построенная на предыдущем этапе фигура действительно искомая, т. е. удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям.

Исследование. Этот этап решения состоит в выяснении того, всегда ли задача имеет решение; если не всегда, то при каких конкретных данных и сколько именно решений она имеет. При этом разными считаются решения, дающие неравные фигуры (или если и равные, то различно расположенные относительно фигуры, с которой связывалось построение).

Опишем некоторые простейшие геометрические построения.

Задача 1. Построить треугольник с заданными длинами всех его сторон.

Пусть длины сторон треугольника заданы отрезками a, b, c.



1. Начертим произвольно луч m, точка A – начало луча.
2. От точки A отложим отрезок AB, равный длине стороны a.
3. Начертим окружность с центром в точке A и радиусом, равным длине стороны b.
4. Начертим окружность с центром в точке B и радиусом, равным длине стороны c.
5. Окружности пересекутся в двух точках. Одну из точек

обозначим буквой C, другую – буквой D. Соединим точку C с точками A и B. Получим треугольник ABC.

6. Если с точками A и B соединить точку D, получим треугольник ABD, равный треугольнику ABC и удовлетворяющему условию задачи, что полезно проверить практическими измерениями либо с помощью линейки, либо – циркуля.

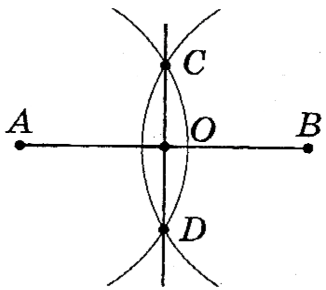
Описанным способом можно построить треугольник, равный данному треугольнику (по трем сторонам данного треугольника).

На этапе исследования задачи полезно практически проверить и установить, что если данные отрезки будут такими, что сумма длин двух меньших отрезков будет равна длине большего отрезка или меньше ее, то треугольник построить невозможно.

Задача 2. Разделить заданный отрезок пополам.

(Построение перпендикулярных прямых)

Пусть дан отрезок AB, который надо разделить пополам.



1. Начертим окружность с центром в точке A и радиусом, большим половины длины отрезка AB (или равным длине отрезка AB).

2. Начертим окружность с центром в точке B и таким же радиусом.

3. Окружности пересекутся в точках C и D. Соединим эти точки отрезком.

4. Точка пересечения отрезка AB и отрезка CD – точка O – делит отрезок AB пополам.

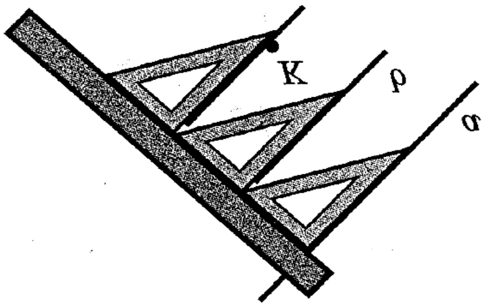
На этапе доказательства правильности проведенных утверждений полезно практическим путем установить, что длины отрезков AO и OB удовлетворяют поставленным в задаче условиям, т. е. они равны по длине.

На этапе исследования полезно дать дополнительные сведения, а именно: прямые AB и CD взаимно перпендикулярны. Записывают это так: $AB \perp CD$.

Можно предложить найти способ построения нескольких взаимно перпендикулярных прямых, связанных с отрезком AB или отрезком CD.

Задача 3. Построить прямые параллельные данной прямой.

Дана прямая a.

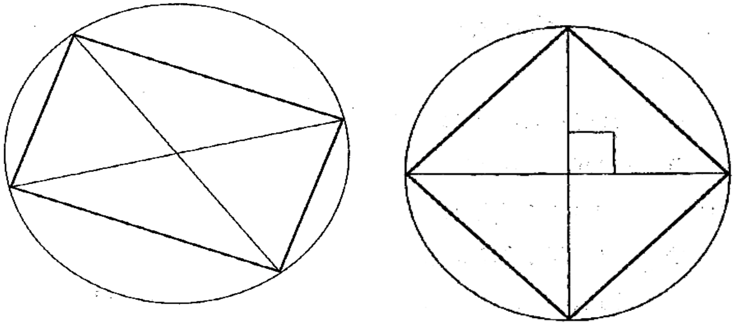


1. Приложим чертёжный угольник к прямой a любой стороной.
2. Приложим линейку к другой стороне угольника.
3. Прижимая угольник к линейке (линейку не сдвигать), сдвинем его вдоль линейки и начертим прямую по той стороне угольника, которая вначале была приложена к прямой a. Получим прямую b, параллельную прямой a.
4. Записывают это так: $b \parallel a$.

При использовании этой задачи полезно в процессе практической работы рассмотреть случаи прикладывания угольника к данной прямой a различными способами, то есть каждую сторону угольника прикладываем к прямой a и сравниваем полученные результаты.

Задача 4. Построение прямоугольника и квадрата без угольника.

Один из самых простых способов построения прямоугольника без использования угольника – построение его с помощью окружности.



1. Начертим окружность.
2. Начертим два любых диаметра этой окружности.
3. Последовательно соединим концы диаметров отрезками.
4. Полученный четырёхугольник является прямоугольником.

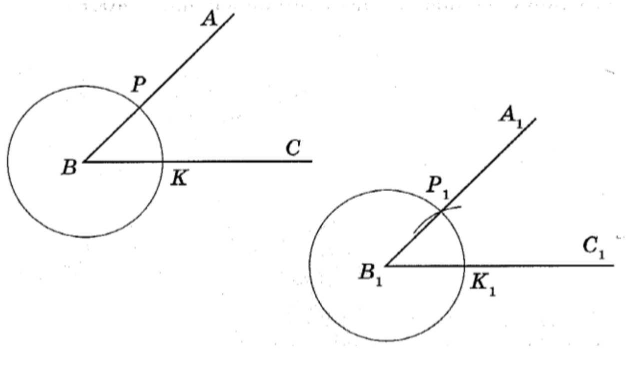
В самостоятельной практической работе дети могут установить, какой прямоугольник получится, если выбранные диаметры окружности будут взаимно перпендикулярны. В итоге должен быть сделан вывод, что если начертить два взаимно перпендикулярных диаметра окружности и соединить их концы отрезками, то получим четырехугольник, который является квадратом.

Задача 5. Построить угол, равный заданному углу.

Дан угол ABC. Построим луч B_1C_1.

Построим окружность произвольного радиуса с центром B. Точки P и K – точки пересечения сторон угла ABC и окружности.

Построим окружность такого же радиуса с центром B_1.



Точка K_1 – точка пересечения окружности и луча.

Возьмем в циркуль расстояние PK.

Постановив острие циркуля в точку K_1 и сделав засечку на окружности, получим точку P_1.

Построив луч B_1P_1, получим угол $A_1B_1C_1$, равный углу ABC.

Записываем это так: $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите понятия из планиметрии и стереометрии, знакомство с которыми предусмотрено программой начальных классов. Выделите те из них, которые вводятся в начальном курсе математики через формальные определения.
2. Закончите определения: «Прямоугольником называется ... », «Параллелограммом называется … », «Квадратом … », «Равнобедренным треугольником … ».
3. Перечислите задачи, которые реализуются при изучении пространственных представлений.
4. Перечислите особенности методики изучения геометрического материала в начальной школе.
5. Охарактеризуйте содержание геометрического материала, которым должны овладеть учащиеся начальных классов в соответствии с примерной программой по математике.
6. Раскройте сущность принципа фузионизма в изучении геометрического материала в начальных классах.
7. Дайте определение окружности. В чем ее отличие от круга? Определите понятия: «радиус окружности», «хорда», «диаметр», «центральный угол», «дуга окружности».
8. Дайте определение объемного тела. В чем состоит отличие шара от сферы?
9. Какими видами деятельности должны овладеть младшие школьники при изучении геометрического материала?

Задания для самоподготовки

1. Перечислите основные виды учебных заданий, обеспечивающих развитие познавательных, регулятивных универсальных учебных действий, которые выполняют школьники при изучении геометрического материала. Приведите примеры таких заданий. Воспользуйтесь учебниками для начальных классов.

2. Предложите предметные модели, которые помогают детям уяснить конкретный смысл понятий: прямая, ломаная, круг, окружность прямоугольник, угол.

3. Приведите не менее трех обучающих игр, в которых в качестве игрового материала используются геометрические фигуры. Укажите главную цель каждой из этих игр. Приведите не менее трех примеров заданий, связанных с разбиением многоугольников на части.

4. Укажите оборудование, которым полезно обеспечить урок знакомства с видами углов.

5. Соедини стрелками или запиши с помощью пар вида (А1) те понятия, при формировании которых полезно использовать прием их сравнения.

А – прямая	1. Отрезок
Б – окружность	2. Кривая
В – треугольник	3. Равнобедренный треугольник
Г – угол	4.Четырехугольник
Д – прямоугольник	5. Ломаная
Е – равносторонний треугольник	6. Квадрат
Ж – параллелограмм	7. Луч
	8. Круг

6. Составьте алгоритм построения прямоугольника с заданными сторонами с помощью циркуля, линейки, угольника.

7. Сформулируйте задания на построение, которые должны уверенно выполнять учащиеся начальных классов.

8. Постройте выпуклый и невыпуклый семиугольник. Существуют ли невыпуклые четырехугольники? Какие признаки моделей многоугольников должны варьироваться, а какие оставаться неизменными при формировании понятия «семиугольник»?

9. Приведите примеры не менее 4-х заданий на распознавание геометрических фигур. Составьте задания, которые следует дать учащимся при формировании понятия «квадрат».

10. Изобразите на чертеже пирамиду, шар, цилиндр. Сколько граней имеет каждая из этих фигур? Связано ли понятие «грань» с кривыми поверхностями? Как предупредить такие ошибки учеников при чтении задач и знакомстве с новыми понятиями через определения?

11. Выполни задания на построение и измерение. Определи, какие умения можно формировать, выполняя эти задания. Составь план работы над данными заданиями с учащимися начальных классов.

– Начерти отрезок длиной 10 см. Поставь на нем точку так, чтобы получился отрезок длиной 4 см. Узнай длину второго отрезка. Сравни длины полученных отрезков.

Выполнение:

Формируемые умения:

План работы:

– Начерти прямоугольник со сторонами 1 см и 6 см. Проведи в нем один отрезок так, чтобы получился квадрат.

– Начерти несколько различных ломаных из двух звеньев так, чтобы длина каждой ломаной была равна 11 см.

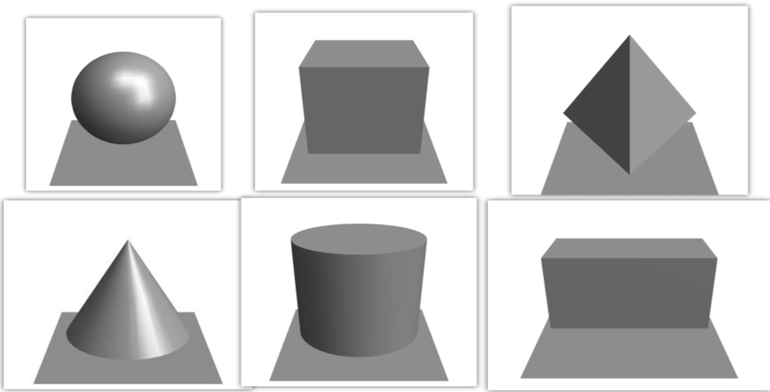
– Начерти ломаную, состоящую из четырех звеньев, длины которых 2 см, 3 см, 4 см, 2 см. Найди длину этой ломаной. Начерти отрезок, длина которого равна длине ломаной. Отметь на этом отрезке длину каждого звена ломаной. Сколько отрезков получилось?

– Начерти два отрезка так, чтобы длина одного была 4 см, а длина другого – в 2 раза больше, причем начало второго отрезка совпадало с концом первого. Обозначь отрезки буквами. Сколько отрезков получилось? Узнай, на сколько сантиметров один из них меньше другого.

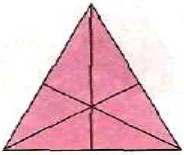
– Начерти три отрезка: длина первого отрезка 8 см, длина второго составляет одну четвертую длины первого, а длина третьего на 6 см больше длины второго. Найди сумму длин данных отрезков.

12. Если на окружности выбрать произвольно две разные точки, то, сколько хорд, дуг и центральных углов можно построить на их основе?

13. Назови каждую из фигур и ее элементы. Какие плоские фигуры можно получить путем проекции каждой из этих фигур на плоскость? Проверьте достоверность ваших ответов путем выполнения практической работы.



14. Выполните чертеж каждой из фигур. Для некоторых фигур сделайте развертку. Приведите примеры подобных заданий для детей начальных классов.



15. Определите количество треугольников на фоне большого треугольника, который изображен на рисунке. Как организовать работу с этим заданием в начальной школе? Какой прием следует использовать, чтобы все дети увидели все треугольники? Придумайте подобное задание.

Глава 4. Изучение величин и способов их измерения в курсе математики начальных классов

План лекции

4.1. Содержание понятий «величина», «виды величин», «тройки взаимосвязанных величин»

4.2. Этапы формирования представления о величине в курсе математики начальных классов

4.3. Положения, определяющие методику изучения величин в курсе математики начальной школы

4.4. Формирование представлений о длине и навыков ее измерения

4.1. Содержание понятий «величина», «виды величин», «тройки взаимосвязанных величин»

Развитие младших школьников при обучении математике в значительной степени зависит от усвоения ими таких базовых понятий, какими являются понятия числа и величины. Именно эти понятия составляют основу курса математики I-IV классов. Кроме того, формирование представлений, а затем и понятий о величинах и их измерении, выходит далеко за пределы курса математики и имеет общекультурное значение, так как широко используется при изучении других учебных предметов.

На основании общеупотребительных значений, приведенных в толковом словаре, слово «величина» употребляется в двух значениях.

1-е значение. Под величиной понимается свойство предметов или объектов, по которому их можно сравнивать и которое можно измерить. В этом значении термин «величина» является родовым понятием, к которому как видовые относятся понятия «длина», «объем», «время», «скорость» и др.

2-е значение. «Величина» – это количественная характеристика свойства предмета, выраженная в единицах измерения. В этом значении слово «величина» употребляется для выражения числового значения свойства предмета (например, 16 метров).

В курсе математики начальных классов используются оба эти значения, поскольку в этот период дети впервые знакомятся с названием величин (длина, площадь, работа, объем и т. д.) и впервые учатся измерять их сначала произвольными мерками, а затем общепринятыми единицами измерения. Позже термин «величина» чаще используется во втором значении, поскольку математика оперирует численными значениями величин с указанием единицы измерения, которую использовали при измерении. Такие записи называют именованными числами 16 см, 24 кг, значениями величин или просто величинами. Поскольку в начальных классах впервые дается представление о величинах и их измерении, то разумно различать понятия «величина» и «значение величины».

Итак, под величиной будем понимать общее свойство множества объектов, по которому их можно сравнивать. Сравнивая объекты по определенному свойству, мы получаем численное значение величины.

Каждое из свойств имеет свое название:

– свойство протяженности называют длиной;

– свойство продолжительности, длительности называют величиной время;

– свойство занимать место в пространстве – вместимость – объем;

– свойство занимать место на плоскости – площадь и др.

Каждая величина имеет область определения – множество всех объектов, обладающих данным свойством – величиной и по этому свойству их можно сравнивать. Величины, которые выражают одно какое-либо свойство различных объектов, называются величинами одного рода или однородными величинами. Например, объекты стол и комната или их отдельные элементы (части), доска, отрезок обладают одинаковым свойством, они имеют протяженность, которое принято называть длиной. По данному свойству эти объекты можно сравнивать, выражая результат сравнения с помощью определенных терминов: длиннее, короче, одинаковые по длине, либо сравнивая объекты по численному значению величины. Один и тот же объект может обладать несколькими свойствами, которые являются величинами. Например, для человека – это рост, масса, возраст и др. Если величины выражают разные свойства объекта, то их называют величинами разного рода, или разнородными величинами. Так, например, длина и масса – это разнородные величины.

Различают два основных вида сравнения величин – непосредственный и косвенный. При использовании непосредственного способа пользуются различными практическими действиями, выбор которых зависит от сравниваемой величины. Например, длины объектов или площади можно сравнивать визуально (на глаз), приложением или наложением площади одного объекта на площадь другого.

Косвенным измерением величины называют отображение области определения величины во множество действительных чисел.

Чтобы осуществить измерение свойства некоторого объекта, из области определения величины выбирают другой объект из этого множества. Аналогичное свойство этого объекта называют единицей измерения величины и обозначают буквой E.

Если задана величина A и выбрана единица измерения величины – E (величина того же рода), то измерить величину A – это значит найти такое положительное действительное число x, что $A = x \cdot E$.

Число x называется численным значением величины A при единице величины E. Оно показывает, сколько раз величина E, принятая за единицу измерения содержится в величине A. Единицу величины E иногда называют меркой, а число x называют мерой величины A при единице E и пишут $x = m_E(A)$.(Читают: x есть мера величины A при единице измерения E.)

Числа вида x•E называют именованными числами. Можно сказать, что процесс измерения величины есть замена величины-свойства моделью величины – именованным числом (число с указанием единицы измерения).

В более общем смысле, измерение – вид деятельности, цель которой – выразить некоторую величину предмета или можно сказать по-другому «выразить некоторое свойство предмета» числовым значением. При этом следует четко различать понятия:

– объект измерения – элемент из области определения величины или предмет, обладающий свойством, которое мы хотим измерить;

– измеряемая величина – свойство объекта, которое будем измерять;

– средство измерения – выбранная мерка;

– результат измерения – численное отношение между измеряемой величиной (свойством) и заранее выбранной единицей измерения данной величины (меркой).

Например, в высказывании «площадь прямоугольника 12 кв. см» – прямоугольник – это объект, площадь есть измеряемая величина объекта; 12 – численное значение величины, кв. см – единица измерения величины.

Рассмотренные понятия – объект, его величина, численное значение величины, единица измерения величины – надо уметь вычленять в математических текстах и задачах. Например, математическое содержание предложения «*собрали 32 килограмма яблок*» школьникам можно объяснить следующим образом: в предложении рассматривается такой объект, как яблоки, и его свойство – масса; для измерения массы использовали единицу измерения массы – килограмм; в результате измерения получили число 23 – численное значение массы яблок при единице измерения массы – килограмм.

Учащиеся часто не различают такие понятия как «отрезок» и «длина отрезка», «площадь прямоугольника» и «прямоугольник». Поэтому учитель должен четко разграничить и довести до сознания учащихся, что длина отрезка – это свойство, которое при выбранной единице измерения может быть охарактеризовано именованным числом, а отрезок – часть прямой; прямоугольник – фигура, а площадь – свойство прямоугольника, которое можем измерить и получить именованное число, характеризующее его, и т.д. Следует помнить, что именованное число возникает в связи с измерением и что при выбранной единице измерения именованное число – это модель конкретной величины, которая выражает *меру отрезка* – если измеряют длину, *меру площади* – если измеряют площадь фигуры и т. д.

В практической деятельности при измерении величин люди пользуются стандартными единицами величин:

- длину измеряют в километрах, метрах, сантиметрах и т. д.;
- массу – в тоннах, граммах, килограммах и т. д.;
- время – в минутах, секундах;
- и др.

Результат измерения записывают в таком виде: 6,2 кг; 25 см; 60 с. Исходя из определения измерения, эти записи можно рассматривать как произведение числа и единицы величины, т.е. соответственно: 6,2•1 кг; 25•1 см; 60•1 с.

Величина, которая определяется только численным значением, называется *скалярной величиной*. Если при выбранной единице измерения скалярная величина принимает только положительные численные значения, то ее называют положительной скалярной величиной. Положительными скалярными величинами являются длина, площадь, объем, масса, время, стоимость и количество товара и др.

Величина, которая определяется численным значением и направлением, называется векторной величиной. Примерами векторной величины являются сила, вес. В начальной школе изучаются только скалярные величины.

Объект, свойство и результат измерения находятся в функциональной зависимости.

При измерении величины (свойства) двух объектов одинаковой меркой (единицей измерения) наблюдается прямая зависимость – большей величине соответствует большее численное значение, равным величинам соответствуют равные значения величин.

При измерении величины одного и того же объекта разными мерками – обратная зависимость – чем больше мерка, тем меньше численное значение величины у этого объекта и обратно – чем меньше мерка, тем больше численное значение величины у измеряемого объекта.

Как мы уже отмечали, в математике термин «величина» используется во втором значении как количественная характеристика свойства предмета. Используя понятие «величина» во втором значении, в математике устанавливают утверждения, которые позволяют переходить от сравнения величин к сравнению чисел, от действий над величинами к соответствующим действиям над числами, и наоборот.

1. Если величины A и B сравнимы и измерены при помощи единицы величины E, то отношения между величинами A и B будет такими же, как и отношения между их численными значе-

ниями, и наоборот:

$$A=B \Leftrightarrow m(A)=m(B); \qquad A<B \Leftrightarrow m(A)<m(B); \qquad A>B \Leftrightarrow m(A)>m(B).$$

Например, если значения масс двух тел таковы, что A=5 кг, B=3 кг, то можно утверждать, что $A>B$, поскольку 5>3.

2. Если величины A и B сравнимы и измерены при помощи единицы величины E, то чтобы найти численное значение суммы $A+B$, достаточно сложить численные значения величин A и B:

$$A+B=C \Leftrightarrow m(A)+m(B)=m(A+B).$$

Например, если A=5 кг, B=3 кг, то

$A+B$=5 кг+3 кг=(5+3) кг=8 кг.

3. Если величины A и B сравнимы и таковы, что $B=x \bullet A$, где x – положительное действительное число, и величина A измерена при помощи единицы величины E, то, чтобы найти численное значение величины B при единицы E, достаточно число x умножить на число $m(A)$:

$$B=x \bullet A \Leftrightarrow m(B)=x \bullet m(A).$$

Например, если масса B в 3 раза больше массы A и A=2 кг, то $B=3A$=3•(2·кг)=(3•2)·кг=6 кг.

Между некоторыми разнородными величинами могут устанавливаться различные связи, зависимости. Три величины называют взаимосвязанными, если они характеризуют одно явление и значение одной из них может быть выражено через значения двух других величин.

В Примерной программе по математике, составленной в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом начального общего образования второго поколения, для изучения в начальной школе рекомендуются следующие «тройки» взаимосвязанных величин:

– скорость, время, пройденный путь;
– производительность труда, время, объем всей работы;

– расход на предмет, количество предметов, общий расход;
– цена, количество, общая стоимость товара.

Данные величины знакомят детей с такими знаниями как зависимость, характеризующую процесс движения, работы, изготовления товара, расчета стоимости. Эти зависимости могут быть выражены в виде формул. Знакомство с названными зависимостями происходит через решение задач. Наиболее ярким примером служит зависимость между величинами скорость, время и пройденный путь, которая характеризуют такое явление как движение (S=v•t).

4.2. Этапы формирования представлений о величине в курсе математики начальных классов

В курсе математики начальных классов дети знакомятся с различными величинами: длина, масса, объем, время, площадь. Длина – это характеристика линейных размеров предмета (протяженности). Масса – это физическая характеристика предмета, определяющая его инертные и гравитационные свойства. Объем (вместимость) – это свойство геометрического тела занимать определенное место в пространстве (вместимость – свойство жидкости или сыпучих веществ занимать место внутри предмета). Время – это длительность протекания процессов. Площадь геометрической фигуры – это свойство фигуры занимать определенное место на плоскости.

При формировании представлений о каждой из названных величин учитываются их специфические особенности, но, вместе с тем, целесообразно ориентироваться на определенные этапы, в которых нашли отражение математическая трактовка данного понятия, взаимосвязь с изучением других вопросов начального курса математики, а также психологические особенности младших школьников.

При изучении величин в методике преподавания математики выделяются следующие этапы.

2. Выявление представлений ребенка о данной величине. Введение понятия и соответствующего термина.
3. Сравнение однородных величин (визуально, ощущением, наложением, приложением, с помощью различных мерок).
4. Знакомство с единицей измерения величины, с измерительным прибором.
5. Сложение и вычитание величин, выраженных в единицах одного наименования.
6. Знакомство с новыми единицами измерения величин, что осуществляется в тесной связи с изучением нумерации по концентрам.
7. Перевод величин, выраженных в единицах одних наименований, в однородные величины, выраженные в единицах других наименований.
8. Сложение и вычитание величин, выраженных в единицах разных наименований.
9. Умножение и деление величины на число.
10. Сравнение величин.

4.3. Положения, определяющие методику изучения величин в курсе математики начальной школы

Общий подход к понятию «величина» как к свойству предметов и явлений позволяет говорить об общей методике их изучения, знание которой позволяет учителю осознанно и целенаправленно организовывать деятельность учащихся.

При знакомстве с величинами и способами их измерения необходимо формировать реальные представления о единицах измерения, добиваться умения определять длину (площадь) объектов «на глаз», оценивать массу небольших предметов, прикидывая ее «на руку», приучать определять небольшие промежутки времени без использования часов.

Измерения без инструментов способствуют формированию у школьников пространственных и временных представлений.

При изучении величин рассматривают соотношения между ними, сообщаются сведения об устройстве простейших измерительных инструментов и правила пользования ими.

Проведение измерительных работ является одним из средств связи преподавания математики с жизнью. Упражняясь в измерениях, учащиеся приобретают измерительные навыки, навыки «чтения» шкалы мерной линейки, часовой шкалы и т. д., при этом формируется умение пользоваться измерительными инструментами.

Выполнение измерений дает возможность выработать у учащихся необходимые представления о приближенных значениях величины, о точности измерений, что подводит к пониманию процесса округления.

Довольно рано учащиеся должны уметь оформить результат измерения в виде фразы «длина этого отрезка около 5 см», «приблизительно равна 7 см».

Изучая данную тему, учителю надо иметь в виду, что полное овладение младшими школьниками системой измерений лежит в основе дальнейшего расширения понятия числа при ознакомлении учащихся с десятичными дробями и действиями над ними.

Методика усвоения таблицы мер в начальных классах должна строиться не только на запоминании или частом повторении, а на тесной связи с практической деятельностью детей в процессе лабораторных занятий и при решении практических задач. Предпочтительно, чтобы учащиеся данные для задач получали в результате непосредственных измерений. Например, задачи на нахождение размеров класса, доски и т. д.

Заметное место в работе по формированию представлений о величинах занимает изучение простейших зависимостей между величинами, на основе которых изучаются производные величины. Например, зависимость между скоростью движения, пройденным расстоянием и временем движения. Причем, полезно сначала установить эту зависимость, используя практическую деятельность или наблюдения за изменением одной величины в зависимости от изменений двух других, а затем дети должны научиться выводить формулы из одной другую, опираясь на математические знания.

Для формирования правильного представления о величинах важно уделять внимание следующим вопросам:

– соблюдению этапов формирования представлений о величине;

– практическим работам, связанным с формированием представлений о величине и способах ее измерения (непосредственных и косвенных);

– формированию измерительных навыков и правил построения объектов, обладающих данным свойством – величиной;

– формированию умений перевода величин, выраженных в единицах одних наименований в другие;

– формированию умений выполнять действия над величинами (именованными числами).

Покажем реализацию этих вопросов на примере формирования величины «длина».

4.4. Формирование представлений о длине и навыков ее измерения

Задачи изучения темы.

1. Сформировать конкретные представления о длине отрезка.

2. Познакомить учащихся с единицами измерения длины и соотношениях между ними. Сформировать умения переводить результаты измерения, выраженные в единицах одних наименований в другие.

3. Сформировать измерительные навыки (навыки работы с линейкой) и умения строить отрезки заданной длины.

4. Сформировать умения складывать и вычитать величины, выраженные в единицах двух и более различных наименований, а также умножать и делить их на число.

Рассмотрим особенности изучения данной величины в системе В. В. Давыдова.

В данной образовательной системе, как, впрочем, и в других, приступая к изучению длины и ее измерению, опираются на имеющийся опыт детей. К началу обучения в школе дети в основном без затруднений выделяют линейную протяженность в объектах, устанавливают отношения: длиннее – короче, шире – уже, выше – ниже, дальше – ближе.

В начальном курсе математики понятие «длина» формируется на конкретных образах, объектах. Формирование представлений о длине и ее измерении проводится с использованием наиболее наглядной модели длины – отрезком и с измерением длин отрезков по следующему плану.

1. Визуальное сравнение длин предметов с единым началом. В результате такой работы учащиеся интуитивно подходят к осознанию ряда важных свойств длины.

– Длины любых объектов сравнимы и при их сравнении имеет место одно из трех соотношений: либо «a больше b», либо «b больше a», либо «a равно b».

– Свойство транзитивности: «если a больше b и b больше c, то a больше c».

2. Сравнение предметов по длине путем наложения и приложения.

3. Наблюдение за вычерчиванием равных и неравных по длине отрезков на клетчатой и нелинованной бумаге.

4. Практическая работа по вычерчиванию равных и неравных отрезков.

5. Подведение учащихся к необходимости измерения длин отрезков с помощью определенной мерки.

6. Знакомство учащихся с единицей измерения длины – сантиметром (устанавливается, что длина отрезка в 1 см, равна приблизительно двум клеткам тетрадного листа).

7. Работа по вычерчиванию полоски в 1 см, наблюдение за длиной отрезка в 1 см по линейке от 0 до 1.

8. Формирование навыков измерения длин объектов с помощью линейки.

9. Самостоятельная работа по определению длины полосок с помощью линейки.

10. Практическая работа по определению длины любых объектов, которые удобно измерять в сантиметрах.

Формирование других единиц измерения длины тесно увязывается с расширением числового множества и протекает примерно по одинаковому плану. Например, в системе В. В. Давыдова новая единица измерения длины – метр вводится по следующему плану [47].

1. Демонстрируется необходимость введения новой единицы измерения длины – метра – на решении практической задачи: измерить длину школьного коридора или классной комнаты.

2. Демонстрируется модель деревянного, столярного метра и отрезки длиной в 1 м. В окружающей обстановке оцениваются «на глаз» длины предметов равные 1 м.

3. Решаются практические задачи по измерения длин предметов окружающей обстановки с помощью метра.

4. Опираясь на реальные модели единиц измерения, устанавливается отношение между известными единицами измере-

ния длины: между дециметром и метром, дециметром и сантиметром, метром и сантиметром. В результате выполненной работы составляется таблица мер длины:

1 м=10 дм; 1 дм = 10 см; 1 м=100 см.

5. Продолжается работа по формированию рассматриваемых понятий и преобразование величин, выраженных в единицах двух наименований, в единицы одного наименования, и наоборот:

3 мм 9 дм = … дм; 73 дм = … м … дм.

6. Сравнение двух длин (величин), выраженных в единицах двух наименований:

5 м 8 дм … 60 см;

1 м … 9 м 9 дм.

7. Сообщаются некоторые сведения из истории появления мер длины.

Анализ подходов к изучению данной величины и способов ее измерения в различных образовательных системах позволяет установить сходство в последовательности изучения темы. Однако, наличие в технологии В. В. Давыдова проблемных задач при переходе от одного этапа к другому, система практических заданий, разработанная система диагностических заданий в большей мере, чем в других ОС отвечает задаче развития универсальных учебных действий, обеспечивающих становление учебной деятельности. Это связано, прежде всего, с ролью величины в данной системе обучения, где в процессе формирования данного понятия формируются важные операции теоретического мышления (анализ, планирование, рефлексия).

Задания для самоподготовки

1. Проанализируйте примерную программу по математике, составленную в соответствии с требованиями стандарта второго поколения и определите, какое место отводится изучению

величин в начальном курсе математики.

2. Проанализируйте одну из вариативных программ обучения математике в начальных классах и выделите программное содержание материала, связанное с изучением величин. Заполните таблицу.

Название величины	1 класс	2 класс	3 класс	4 класс

3. Какие приемы работы следует организовывать учителю в процессе изучения различных величин, чтобы формировать у детей универсальные учебные действия.

4. Как следует организовать формирование представлений о величине, чтобы реализовать системно-деятельностный подход к обучению.

5. Сущность компетентностного подхода можно рассматривать как овладение обучающимися наиболее общими математическими способностями, умениями и практическими навыками, позволяющими понимать реальную ситуацию, находить пути ее решения в условиях конкретного общества и достигать результатов, проявляя функциональную грамотность, в решении практических (жизненно важных) задач. Какие приемы и методы работы с учащимися по данной содержательной линии позволят реализовать этот подход к обучению?

6. Познакомьтесь с этапами формирования величин. Определите цель каждого этапа и типы упражнений, позволяющих реализовать данную цель в вариативных технологиях при формировании представлений о различных величинах (масса, время). Заполните таблицу.

Этапы формирования представлений о величине и ее измерении	Цель этапа	Типы упражнений по учебнику М.И. Моро и др.	Типы упражнений по учебнику Н.Б. Истоминой

Сделайте сравнительный анализ совокупности упражнений в рассмотренных учебниках математики для начальных классов.

7. Подберите исторические сведения о величинах, способах и единицах их измерения, которые можно использовать на уроках как средство формирования познавательных мотивов обучения.

8. Составьте фрагмент урока на тему «Длина, измерение длины» по следующему плану.

– Выяснение и уточнение представлений школьников о длине (обращение к опыту ребенка).

– Сравнение длин (визуально, с помощью ощущений, наложением, приложением, путем использования различных мерок).

– Знакомство с единицей длины – сантиметром и с измерительным прибором – оцифрованной линейкой.

– Формирование измерительных умений и навыков.

9. Найдите в учебниках математики для начальных классов задания, которые можно использовать с целью формирования измерительных навыков. Составьте самостоятельно задания с той же целью. Опишите методику работы с этими заданиями.

10. Найдите задания, в которых реализуется связь:

– вопросов нумерации чисел и изучение величин;

– изучение величин и знакомство с дробями.

Какие средства наглядности можно использовать при выполнении этих заданий?

11. Определите, в каком классе рассматривается умножение и деление длин на число. Какие знания лежат в основе этой операции? Приведите примеры заданий, связанных с изучением этой темы. Опишите методику работы с ними.

12. Для усвоения соотношений между единицами длины

предлагаются упражнения:

– на измерение;

– на построение отрезков определенной длины, выраженной в единицах двух наименований;

– на перевод величин, выраженных в одних единицах, в другие единицы измерения;

– на сравнение однородных величин, выраженных в единицах различных наименований.

Аналогичные задания предлагаются при изучении тем «Единицы массы», «Единицы времени». Найдите в учебниках по различным системам обучения задания указанных видов, которые выполняются при изучении единиц длины, массы, времени. Составьте учебные задания данных видов с различными величинами.

13. Проанализируйте задачи, предлагаемые в учебниках по различным методическим системам. Найдите задачи, в которых даны величины, выраженные в единицах различных наименований. Приведите рассуждения учащихся при переводе величин, выраженных в одних единицах измерения, в другие.

Глава 5. Изучение раздела «Работа с данными»

План лекции

5.1. Содержание раздела «Работа с данными»

5.2. Комбинаторные задачи и их решение

5.3. Элементы теории вероятности в курсе математики начальных классов

5.4. Элементы наглядной описательной статистики

5.1. Содержание раздела «Работа с данными»

В действующем государственном образовательном стандарте второго поколения (ГОС НОО) элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики входят в школьный курс математики начальной школы в виде одной из содержательных линий «Работа с данными».

Содержательно этот раздел включает элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей. В математике этот раздел называют стохастикой.

Комбинаторика, возникнув в XVI веке, в настоящее время является одним из важных разделов математической науки. Ее методы широко используются для решения современных практических и теоретических задач. Установлены связи комбинаторики с другими разделами математики. Так, комбинаторика является базой для изучения теории вероятностей и математической статистика.

Раздел математики, называемый теорией вероятностей, изучает закономерности, которые характерны для массовых явлений. Предметом этой науки являются математические модели случайных величин. Цель теории вероятностей – осуществление прогноза в области случайных событий, явлений, с целью влияния на ход этих событий, установления контроля или ограничения сферы действия изучаемых случайностей. На данном этапе развития ни одна область науки не обходится без применения методов теории вероятностей.

Для выявления закономерностей случайных явлений и событий развивается еще один важный раздел математики, тесно связанный с теорией вероятностей – математическая статистика. В данном разделе изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений.

В связи со значимостью описанных разделов в современной реальной жизни и доступности для усвоения младшими школьниками элементарных методов познания, используемых в названных разделах математики, элементы комбинаторики, теории вероятностей и наглядной описательной статистики были включены в содержание математического образования младших школьников.

В примерной программе по математике раздел «Работа с данными» представлен следующим содержанием.

Выпускник научится:

– устанавливать истинность (верно, неверно) утверждений о числах, величинах, геометрических фигурах;

– читать несложные готовые таблицы;

– заполнять несложные готовые таблицы;

– читать несложные готовые столбчатые диаграммы.

Выпускник получит возможность научиться:

– читать несложные готовые круговые диаграммы;

– достраивать несложную готовую столбчатую диаграмму;

– сравнивать и обобщать информацию, представленную в строках и столбцах несложных таблиц и диаграмм;

– понимать простейшие выражения, содержащие логические связки и слова («… и …», «если …, то …», «верно/неверно, что …», «каждый», «все», «некоторые», «не»);

– составлять, записывать и выполнять инструкцию (простой алгоритм), план поиска информации;

– распознавать одну и ту же информацию, представленную в разной форме (таблицы и диаграммы);

– планировать несложные исследования, собирать и представлять полученную информацию с помощью таблиц и диаграмм;

– интерпретировать информацию, полученную при проведении несложных исследований (объяснять, сравнивать и обобщать данные, делать выводы и прогнозы).

Анализ содержания этого раздела свидетельствует, что его изучение невозможно без опоры на наблюдения за процессами, происходящими в окружающем мире, на реальный жизненный опыт ребенка, что даст возможность накопить определенный запас представлений о статистическом характере окружающих явлений и их свойствах. Данный аспект раздела способен содействовать возрастанию интереса к самой образовательной области «математика», пропаганде ее значимости и универсальности.

5.2. Комбинаторные задачи и их решение

Комбинаторика – область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Процесс обучения школьников решению комбинаторных задач имеет большие развивающие возможности, способствует развитию комбинаторного мышления. На этой основе совершенствуются приемы умственной деятельности, формируются важные для человека способности комбинировать, осуществлять перебор вариантов, выбор вариантов по заданным параметрам и их подсчет. Комбинаторное мышление связано со становлением умственных операций, активизирует мыслительную деятельность и тесно связано с теоретическим мышлением, считающимся основным «новообразованием» младшего школьника

(Л. С. Выготский, В. В. Давыдов [16]).

Комбинаторные задачи, предлагаемые в начальных классах, как правило, носят практическую направленность и основаны на реальном сюжете. Это вызвано психологическими особенностями младших школьников, их недостаточной способностью к абстрактному мышлению. Решение таких задач дает возможность расширить знания учащихся о самой задаче, о методах решения задач, поскольку на комбинаторных моделях четко прослеживаются этапы использования математики в решении практических задач.

Комбинаторная задача обычно требует осуществления перебора всех возможных вариантов или подсчета числа вариантов с заданными параметрами.

В методической литературе неоднократно представлена классификация комбинаторных задач по различным основаниям [7]:

– по характеру требования (вопроса), где надо найти или доказать существование комбинаций с заданными свойствами, либо определить число оптимальных по указанному критерию решений;

– по сложности перебора, когда нужно произвести перебор всех возможных вариантов, либо осуществить сокращенный перебор или операция перебора производится несколько раз в зависимости от рода объектов;

– по виду комбинаций (перестановки, сочетания и размещения с повторениями и без повторений) число которых надо определить;

– по способу выбора (берем все множество или подмножество) и упорядочения элементов множества.

Классификации задач обычно создаются для оптимизации технологии обучения решению этих задач, поскольку для задач, относящихся к одной группе можно найти сходный прием или способ решения.

Комбинаторные методы – совокупность методов, основанных на идеях комбинаторики.

В математике используют два основных метода решения комбинаторных задач: формальный, когда для решения задач используются формулы либо правила комбинаторики и неформальный, когда под методом решения комбинаторной задачи понимают сам процесс непосредственного составления различных комбинаций, их упорядочивание и подсчет. Сами же варианты комбинации не образуются. Результатом решения задач этим методом является число возможных вариантов.

В начальном курсе математики комбинаторные задачи решаются неформальным методом. Используя прием перебора, обучающиеся непосредственно в практической деятельности составляют варианты комбинаций, осуществляют их подсчет, либо используют действие выбора комбинаций с заданными характеристиками. Здесь важным становится процесс составления комбинаций и результатом следует считать не сколько комбинаций получится, а какие могут получиться комбинации.

Такие понятия как «комбинация», «соединения», «перебор», «выборка» дети усваивают на интуитивном уровне, опираясь на текст или подтекст конкретной задачи.

Вначале, обучающиеся осуществляют хаотичный перебор вариантов, допуская пропуски вариантов или их повторение, а затем приходят к выводу о необходимости нахождения универсального способа перебора, устраняющего выявленные ошибки – организованному (систематическому) перебору.

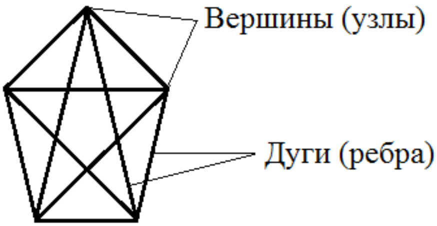
Организованный (систематический) перебор – строгий порядок разбора всех случаев возможных решений.

Переход от одного способа образования комбинаций к другому является классической ситуацией по постановке проблемы и организации ее решения в групповой работе учащихся.

Прием организованного перебора вариантов позволяет осознавать элементарные действия, входящие в состав способа, планировать их последовательное выполнение. Практическая деятельность по решению комбинаторных задач закладывает основу для осознанного использования формул при решении комбинаторных задач в старших классах.

Для облегчения процесса организованного перебора используются схематические рисунки, таблицы и графы.

Граф – это схематическое изображение какой-либо системы, где элементы системы представляются как вершины или узлы графа, а связи между элементами представлены стрелками или дугами, которые называют ребрами графа. При этом пара вершин может соединяться несколькими ребрами. Если вершина соединяется дугой сама с собой, то такое ребро называют петлей. Ребра графа могут быть прямолинейными или криволинейными, причем, длина ребер и расположение вершин на рисунках изображаются произвольно.



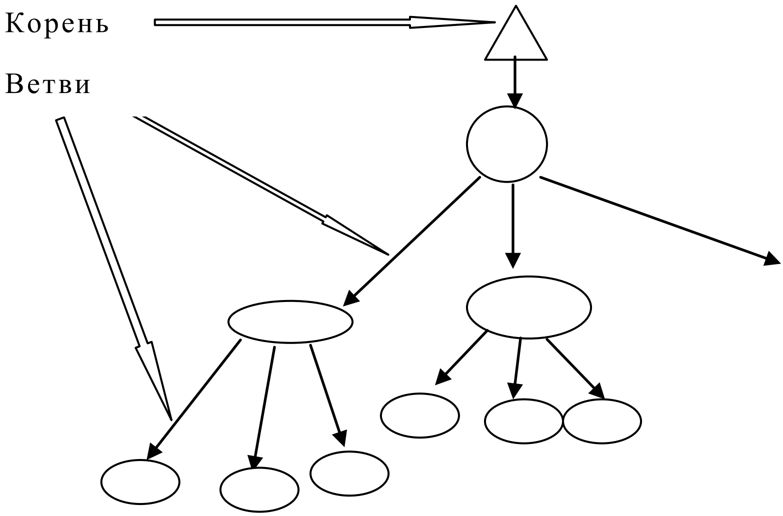
В начальном курсе математики для решения задач используются ориентированные, неориентированные графы и дерево возможных вариантов.

Если граф не имеет стрелок, то есть ориентированных ребер, то его называют неориентированным. Соответственно, граф, состоящий из стрелок, то есть ориентированных ребер, называют ориентированным.

Неориентированные графы еще называют сетями, которые могут быть как замкнутыми, так и незамкнутыми.

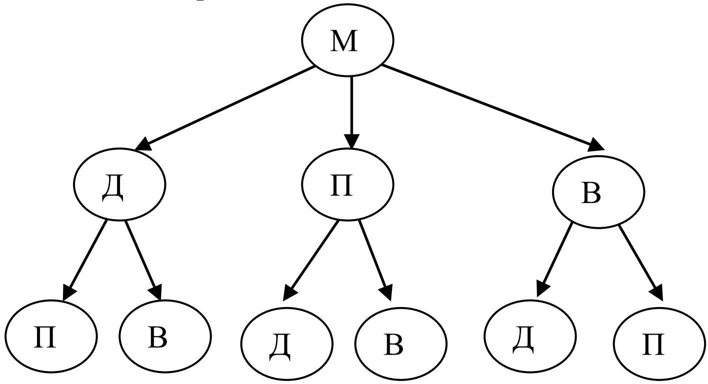
Если необходимо схематично изобразить структуру задачи, где осуществляется многошаговый процесс принятия решений, то используют граф, который называют деревом возможных вариантов.

Такой граф позволяет упорядочить процесс принятия решений, при этом, корень дерева – состояние, в котором возникает необходимость, а ветви дерева отображают различные события, которые могут иметь место.



Приведем пример. Задача. «Миша решил в воскресенье навестить дедушку, своего друга Петю и старшего брата Володю. В каком порядке он может организовать визиты? Сколько вариантов получилось?»

Сначала выясняется, как можно обозначить каждого участника визитов. Рассмотрев разные предложения, приходят к выводу, что быстрее и удобнее изобразить каждого участника небольшими овалами и обозначить их соответствующими буквами: М, Д, П, В. Учитель предлагает изобразить исходной точкой Мишу, а всех кого он посещал, точками, расположенными ниже. Далее ученики придумывают, как изобразить на чертеже одно посещение. Чтобы показать одно посещение, можно соединить две точки стрелкой. Затем, предполагают, что он сначала посетил дедушку (Д). После чего он может пойти к брату В или другу П (точку Д соединяют стрелками с точками В и П). Получают два возможных варианта (две ветви.) Потом переходят к другому возможному варианту. И так, до тех пор, пока не построят все возможные ветви. По получившемуся дереву подсчитывают число вариантов для визита.



Обучая школьников решению комбинаторных задач с помощью систематического перебора полезно опираться на теорию поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина [15]. Согласно этой теории нами определены виды деятельности детей на каждом из этапов формирования умения выполнять организованный перебор.

На первом этапе следует создать положительное отношение школьников к целям и задачам предстоящего действия, к содержанию материала, намеченного для усвоения. Помощь в создании такой мотивации может оказать интересная практическая ситуация, решение которой сводится к решению комбинаторной задачи.

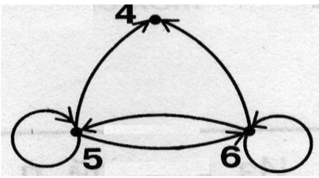
Второй этап направлен на создание полной ориентировочной основы действия, в данном случае к действию по выполнению систематического перебора вариантов. Ориентировочная основа действия представляет собой систему указаний на то, как можно выполнить новое действие. При этом самого действия у ученика пока еще нет, ему еще надо научиться.

На этом этапе необходимо предусмотреть, чтобы способы действий не давались «в готовом» виде, а дети сами в процессе групповой работы приходили к их открытию.

Первой наглядной основой для организованного перебора может служить таблица, поскольку дети работали с таблицей при изучении других тем (Если для групповой работы поставлена проблема «найти средство, позволяющее выполнить перебор элементов без ошибок и пропусков вариантов, то в качестве первого средства, дети предлагают таблицу»).

Например, задание для групп: «найдите способ составления всех возможных двузначных чисел из цифр 4, 5, 6, не допуская ошибок».

разряд единиц / разряд десятков	4	5	6
4			
5			
6			



Затем, вводится граф, как средство помогающее осуществить организованный перебор.

Поиск новых способов перебора создает условия для обучения планомерному анализу заданий нового типа, который позволяет учащимся самостоятельно выделять опорные точки и условия правильного выполнения заданий. Позже по этим указаниям формируется действие, соответствующее данному заданию. Здесь уместно давать задания с нарастающей трудностью

Третий этап предусматривает формирование действия в материализованной форме по готовым схемам, таблицам, графам. Здесь надо учесть рекомендации П. Я. Гальперина [15], который подчеркивает, что на этом этапе учащийся осуществляет ориентировку и исполнение формируемого действия с опорой на внешне представленные компоненты схемы ориентировочной основы. На этом этапе уместны задания, где уже осуществили систематический перебор вариантов, а ребенок только объясняет (с опорой на вопросы учителя) способ перебора, изображенный с помощью таблицы или графа. Возможны варианты заданий, где ребенок проверяет правильность выполненного задания или заканчивает уже начатый кем-то перебор и др.

Задание: Сформулируй задание и проверь, правильно ли оно выполнено.

разряд единиц разряд десятков	6	7
4	46	~~74~~ 47
5	56	~~75~~ 57
6	66	~~76~~ 67

Дети устанавливают ошибки, объясняющие причину, и записывают правильные варианты ответов.

Следующий, четвертый этап направлен на выполнение действия в громкой речи без опоры на готовые схемы, таблицы или графы. На этом этапе в заданиях требуется выбрать способ перебора и объяснить его выполнение. Отличительным признаком всего процесса выполнения действия становится речь. От учащегося требуется не только построить модель способа (таблицу, граф), но и объяснить процесс построения в понятной другим словесной форме с правильным использованием новых понятий и словосочетаний.

На пятом этапе дети выполняют действие перебора в умственном плане с частичной фиксацией во внешней речи, как процесса организованного перебора, так и результата выполняемого действия.

Шестой этап характеризуется перенесением действия в умственный, внутренний план индивидуального сознания. Сформированное умственное действие систематического перебора реализуется с предметным содержанием в форме образов или понятий без участия развернутой речи.

В обучении школьников решению комбинаторных задач полезно соблюдать определенные методические этапы.

Название этапа	Цель этапа	Приемы реализации этапа
Подготовка к восприятию материала	Знакомство с задачами нового вида, где ответом будет не число, а ряд конкретных комбинации, удовлетворяющих указанным в условии задачи характеристикам, и способами их решения.	Знакомство со способом решения данных задач и формой представления результата решения. Выбор задач нового вида из ряда задач известного детям типа. Сравнение и выделение характерных особенностей этих задач.
Этап восприятия нового способа	Знакомство со способом систематического перебора и его моделью в виде таблицы.	Создание проблемной ситуации по отысканию универсального (систематического) способа перебора. Уточнение полной ориентировочной основы выполнения этого действия. Поиск средств (модели способа), позволяющих выполнить перебор элементов без ошибок и пропусков вариантов.
Этап осознания и осмысления способа организованного перебора и его моде-	Освоение новых моделей способа организованного перебора и переход на новый уровень форми-	Анализ и построение новых моделей способа организованного перебора (граф неориентированный (сети) или ориентирован-

лей	рования действия (проговаривание в громкой речи про себя)	ный, дерево возможных вариантов), их анализ, выделение элементов, усвоение названий графов и их элементов. Применение новых моделей для решения комбинаторных задач с объяснением.
Этап закрепления и применения способа.	Закрепление способа и его моделей, применение способа для отработки умений из других разделов математики в начальных классах.	Самостоятельный выбор модели для систематического перебора. Задания на выбор, сравнение, дополнение, преобразование, конструирование модели к задаче. Составление задач комбинаторного типа при изучении нумерации чисел, вычислениях, порядка действий и др.

5.3. Элементы теории вероятностей в курсе математики начальных классов

К введению элементарных знаний по теории вероятности в курсе математики начальных классов и основной школы отношение всегда было неоднозначным.

С 1899 года обсуждался вопрос о включении данного раздела в школьный курс математики. С 40-х годов прошлого столетия, элементы теории вероятностей, в разном объеме и с разной степенью абстрактных знаний, то включались, то убирались из школьных программ по математике.

В целом ряде диссертационных исследований прошлого века была доказана доступность, а, следовательно, и возможность включения элементов комбинаторики и теории вероятностей в школьный курс математики. Начиная с 1995 года элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей были включены в содержание математического образования основной школы. Программа по математике, разработанная на основе Государственного стандарта общего начального образования второго поколения, рекомендует знакомство обучающихся с основными понятиями теории вероятности: «опыт», «события», «вероятность» на практической основе.

Работая с этими понятиями в начальных классах, следует постоянно акцентировать внимание на математический смысл слов «опыт», «события», «вероятность», поскольку обучающиеся чаще всего воспринимают эти понятия в контексте «бытовой» лексики, связывая его с неким единичным бытовым актом.

В соответствии с определением понятия «события» наряду с единичным актом надо мыслить и некоторое их множество, с числом элементов больших или равных единице. Учителю необходимо четко разграничивать понятия опыта (эксперимента) и события.

Опытом, или экспериментом, называют всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых происходит соответствующее явление. Возможный результат опыта называют событием. Например, опытом является подбрасывание монеты, а событиями исход этого опыта, когда монета упадет: «герб» или «цифра на верхней ее стороне». Опытами являются подбрасывание игрального кубика, стрельба по мишени, извлечение шара из ящика и т. п. При этом полезно рассматривать такие опыты, при каждом испытании которых возможны несовместные и равновозможные исходы. Каждый такой исход называется элементарным исходом или элементарным событием.

Формирование представления о понятии «события» у учащихся начальных классов начинается с рассмотрения простейших вероятностных моделей: подбрасывание игральных кубиков и монет, извлечение шаров из урны – и формирование на интуитивном уровне понятия «опыта», «элементарного события».

Еще одним элементом, способствующим формированию представлений о понятии «события» является классификация событий по степени их «объективной возможности реализации». В окружающем мире не существует иных событий, кроме достоверных, невозможных и случайных.

Сначала для формирования представления о видах событий учащимся предлагаются задания, в которых надо определить, при каких условиях данное событие может произойти, а при каких никогда не произойдет.

Далее вводятся термины «достоверное событие», «невозможное событие», «случайное событие» и учитель формулирует определения данных понятий.

Второе фундаментальное понятие теории вероятностей – понятие «вероятность». Это понятие является основой построения всех схем вероятностного характера, описывающих широкий класс случайных явлений.

Формирование этого понятия, так же как и понятия «события», начинается с преодоления противоречия между субъективным опытом ученика употребления им термина «вероятность» в повседневной практике и смыслом, вкладываемым в определение этого понятия в математике.

В настоящее время существует несколько определений понятия «вероятность события»: философское, статистическое, геометрическое, аксиоматическое и классическое.

Философский подход к определению вероятности как «меры (количественной оценки) степени возможности события» не является математическим. Здесь подчеркивается объективный, не зависящий от познающего объекта смысл количественной оценки вероятности. Неприемлемо это определение и для реализации целей обучения теории вероятностей в школьном курсе математики.

В начальном курсе математики используется классическое определение понятия вероятности события.

В качестве примера определения вероятности события на основе классического определения вероятности можно рассмотреть задачи на вычисление вероятности выпадения «орла» или «решки» при бросании симметричной монеты.

Учащихся младших классов можно познакомить с четырьмя основными типами задач по теории вероятностей, выделенные в работах И. Н. Власовой [12].

1. К первой группе относятся задачи на классификацию событий. Учащиеся при решении данных задач учатся различать возможные, невозможные и случайные события.

2. Ко второй группе относятся задачи на определение исхода в испытаниях. При решении данных задач учащиеся приобретают навыки рационального перебора вариантов исходов при испытаниях, записи вариантов и подсчета их числа.

3. К третьей группе относятся задачи на сравнение вероятностей событий. Процесс сравнения вероятностей событий следует рассматривать как формирование умения у учащихся начальных классов использовать знания о классификации событий в новых условиях.

4. К четвертой группе относятся задачи на определение вероятностей событий (относительной частоты). Для их решения требуется не формальное знание о возможных исходах и частоте появления случайного события, а необходимо понимание приемов статистических исследований.

Задачи на определение вероятности события являются задачами повышенной трудности, необязательные для решения всеми учащимися.

5.4. Элементы наглядной описательной статистики

Основная задача математической статистики – указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате поставленных экспериментов (наблюдений). При изучении реальных предметов часто бывает невозможным обследовать все элементы совокупности. Например, практически невозможно выявить размеры обуви у всех людей планеты. А проверить, например, наличие листов некачественной фотобумаги в большой партии хотя и реально, но бессмысленно, так как полная проверка приведет к уничтожению всей партии бумаги.

В подобных случаях вместо изучения всех элементов совокупности, которую называют генеральной совокупностью, обследуют ее значительную часть, выбранную случайным образом. Эту часть называют выборкой.

Центральным понятием математической статистики является «выборка». Учащиеся начальных классов с данным понятием знакомятся в неявном виде в процессе решения статистических задач. Например, учащимся предлагается выборка определенных объектов и ряд вопросов, на которые они должны ответить.

Задача 1. На двух книжных полках стоят книги: сказки, рассказы, повести.

1. Расскажи с помощью таблицы: а) на какой полке меньше всего книг с рассказами; б) на какой полке больше всего книг со сказками; в) на какой полке больше книг.

2. Сравни число книг со сказками и книг с повестями.

Цель этого задания: научить младших школьников «читать» информацию, представленную в таблице, сравнивать между собой данные и делать определенные выводы.

Далее учащимся можно предложить задачу, в которой требуется результаты выборки представить в виде таблицы.

	Сказки (шт.)	Рассказы (шт.)	Повести (шт.)
Первая полка	7	21	8
Вторая полка	9	12	13

Задача 2. В секции женской обуви отдела «Обувь для детей и взрослых» в течение дня производился учет размеров купленной обуви. Были получены следующие результаты: 37, 36, 41, 38, 38, 37, 37, 35, 37, 39, 37, 40, 36, 35, 37, 37, 35, 37, 38, 38, 37, 37, 35, 37, 39, 37, 36, 37, 37, 40, 37, 36, 38, 39.

Представьте эти результаты в виде таблицы. Какой размер обуви чаще пользовался спросом, а какой – реже?

Среди задач по стохастике [12] имеются задания, требующие сбора, упорядочивания, кодирования и сохранения в удобной форме информации. Например.

Задача 3. Проведи опрос среди одноклассников, где они были в воскресенье, и заполни таблицу аналогичную той, что изображена на рисунке. Сделай вывод о том, какое место отдыха было наиболее популярным.

Место отдыха	В парке	В театре	Дома	На даче	В лесу	В гостях
Число учащихся						

Полученные в результате наблюдения (опыта, эксперимента) данные можно упорядочить, представить в удобном для обозрения и анализа виде. Таблица является одним из способов представления информации, но более наглядным является графическое представление данных. Это различные диаграммы: линейные, столбчатые и круговые.

Диаграммы используются как наглядное средство, играющее важную роль в общем развитии школьника, как один из способов доведения до учащихся разнообразной научной информации.

Рассмотрим алгоритмы построения диаграмм. Наиболее простыми с точки зрения построения являются столбчатые или линейные диаграммы.

Используя столбики или отрезки, можно наглядно представить различные значения величины, а затем, опираясь на наглядно представленное изображение, легко увидеть всевозможные количественные отношения между значениями величины рассматриваемых в задаче объектов.

Алгоритм построения столбчатых диаграмм состоит из следующих шагов.

– Построить координатный угол.

– Определить цену деления шкалы, удобную для обозначения значений величины.

– Нанести эти деления на вертикальный координатный луч построенного угла.

– На горизонтальном луче угла отметить на равном расстоянии друг от друга точки по числу рассматриваемых объектов.

– Возле обозначенных точек построить вертикальные столбцы (отрезки), высота которых будет равна соответствующему значению величины.

Круговые диаграммы используются в том случае, если дети знакомы с понятиями «центральный угол» и «»дробь». Алгоритм построения круговых диаграмм может включать следующие шаги.

– Множество всех значений величины рассматриваемых объектов или явлений (целое) следует принять за единицу.

– Найти, какая часть от целого приходится на каждый объект или явление, представить результат в виде дроби (можно упорядочить данные, записав их в таблицу).

– Найти величины центральных углов, соответствующих каждой дроби по формуле: $360°:n•x$, где x/n – дробь, соответствующая объекту.

– Построить в данной окружности центральные углы, соответствующие каждой дроби.

Например, дана задача. Ваня, Гриша и Марк собирали грибы: белые, подберезовики, сыроежки и лисички. Дома они выложили все грибы и посчитали. Белых оказалось 2 гриба, подберезовиков – 3, сыроежек 8 и лисичек – 3. Найдите способы наглядно представить данную информацию.

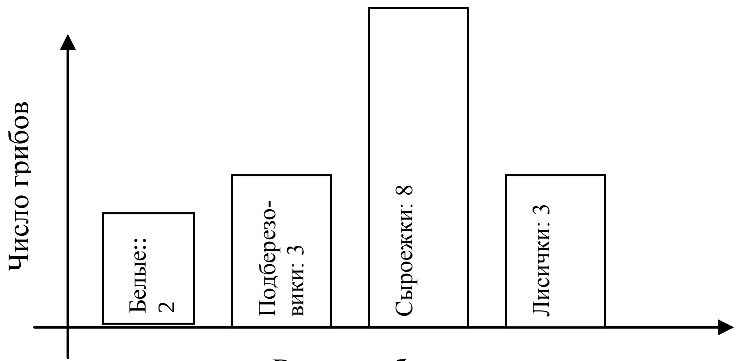
Работая над задачей нужно выделить объекты, используемые в задаче (грибы: белые, подберезовики, сыроежки и лисички.). Назвать величину, значения которой будем изображать на моделях (количество). Назвать значение величины у каждого объекта. Установить отношение целое – все грибы, виды грибов – это части целого.

Дети могут предложить 4 способа выполнения этого задания.

1. Сделать схематичный рисунок.

2. Выбрать масштаб (например, 1 клеточка → 1 гриб) Начертить отрезки, учитывая выбранный масштаб.

3. Построить столбчатую диаграмму.



4. Построить круговую диаграмму.

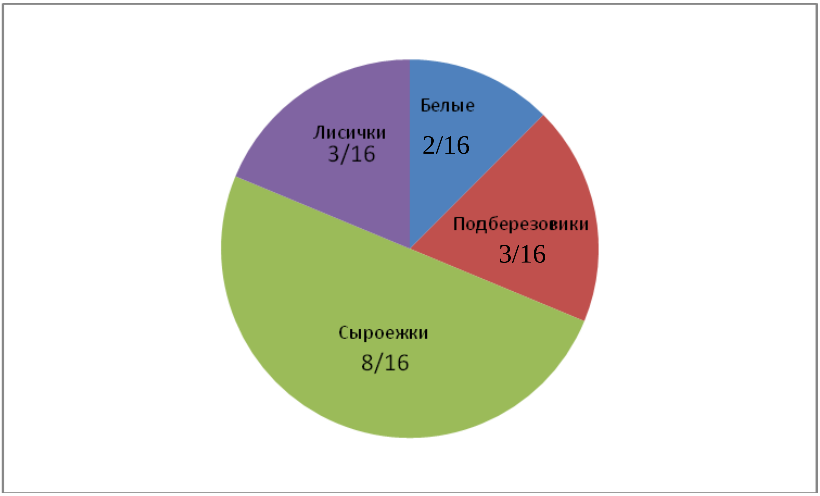
Пояснение к построению круговой диаграммы.

Всего грибов – 16 штук – это целое, примем его за единицу (1). Тогда каждый вид грибов будет составлять следующую часть целого: белые – 2/16; подберезовики – 3/16; сыроежки – 8/16; лисички – 3/16.

Найдем величины центральных углов, соответствующих каждой дроби по формуле: 360°:*n*•*x*, где *x*/*n* – дробь, соответствующая объекту.

Внесем результаты вычислений в таблицу.

Объекты	Дробь – часть целого / градус угла в круговой диаграмме
Белые	2/16 =45°
Подберезовики	3/16 =67,5°
Сыроежки	8/16=180°
Лисички	3/16=67,5°



При построении круговых диаграмм используем следующие рекомендации по делению круга на части. При делении круга на 4 равных части – строим два взаимно перпендикулярных диаметра круга. При делении круга на 6 равных частей – раствором циркуля делаем штрихи, равные радиусу круга.

Включая в содержание обучения элементы статистики, полезно придерживаться следующих рекомендаций.

– На этапе знакомства и использования данного материала иллюстрировать его яркими, жизненно важными, актуальными, запоминающимися примерами, постоянно подчеркивать связь данного материала с повседневной жизнью.

– Использовать статистические данные из жизни страны, школьной практики, примеры из географии, биологии, окружающего мира, данные физического и биологического развития человека.

– Избегать лишнего формализма, задач, касающихся азартных игр, либо устаревших, утративших актуальность в настоящее время.

– Осуществлять связь данного материала с другими разделами курса математики в начальных классах.

В примерной программе, разработанной на основе Федерального государственного образовательного стандарта второго поколения [48], предлагается три варианта тематического планирования, один из которых направлен на усиление стохастической направленности курса математики. Этот вариант планирования отводит большее количество часов на раздел «Работа с данными». Обучая по третьему варианту программы, особое внимание следует уделять переводу информации из текстовой формы в табличную, созданию для одного набора данных разных таблиц, фиксированию результатов сбора, представлению информации в таблице и диаграмме, построению диаграмм по табличным данным.

Третий вариант планирования содержания математического образования в большей степени ориентирован на развитие у обучающихся умения работать с информацией. Школьники, обучающиеся по третьему варианту, учатся не только обнаруживать и интерпретировать информацию по заданному плану, но и участвуют в самостоятельном составлении различных схем, инструкций, алгоритмов по сбору, анализу и представлению информации.

Результаты анализа современных учебников математики для начальной школы позволяют констатировать, что комбинаторная, вероятностная, статистическая компоненты содержания представляют собой некоторый минимум, доступный младшим школьникам и достаточный для формирования у них комбинаторного стиля мышления, вероятностной интуиции и первоначальных вероятностно-статистических представлений.

Изучение статистических и связанных с ними информационных и комбинаторных понятий в начальной школе способствует:

– накоплению систематизированных представлений о явлениях стохастической природы;

– ознакомлению с «неформальными» методами решения комбинаторных и вероятностных задач;

– формированию базовых умений работать с информацией.

Задания для самоподготовки

1. Рассмотрите образец решения комбинаторной задачи.

Задача. В одной деревне мужчин называли именами Иван, Пётр, Михаил. Проживало в этой деревне 8 мужчин. Может ли случиться так, что в деревне нет мужчин с одинаковым именем и отчеством?

Решение. Составим таблицу. Пусть буквы, стоящие в строках обозначают имя, а буквы, стоящие в столбцах отчество. Пары, получившиеся на пересечении строк и столбцов – имя и отчество мужчины.

	И	П	М
И	ИИ	ИП	ИМ
П	ПИ	ПП	ПМ
М	МИ	МП	ММ

Из таблицы видно, что сочетания не совпадают. По таблице подсчитываем число всех возможных отличающихся имен-отчеств. Таких вариантов шесть: Иван Петрович, Иван Михайлович, Петр Иванович, Петр Михайлович, Михаил Иванович, Михаил Петрович. Сравниваем число 6 с числом мужчин в деревне – 8 и отвечаем на вопрос задачи.

Ответ. Может случиться, что в деревне нет мужчин с одинаковым именем и отчеством.

Выполните по образцу решение следующих комбинаторных задач, используя различные модели задачи.

Задача 1. В чемпионате по шахматам четыре участника Лера, Коля, Витя и Соня. Сколько будет проведено игр, если каждый должен сыграть с каждым одну партию?

Задача 2. Прямоугольник состоит из трех квадратов. Сколькими способами можно раскрасить эти квадраты тремя красками: желтой, синей и красной?

Задача 3. Представь, что у тебя 10 роз: три красных, две оранжевых и пять белых. Какие разные букеты из трех роз ты сможешь составить?

Задача 4. Перечислите все двузначные числа, в записи которых встречаются цифры 0, 3, 2.

Задача 5. Пятеро друзей встретились после каникул и обменялись рукопожатиями. Каждый, здороваясь, пожал руку каждому другу. Сколько всего было сделано рукопожатий?

Задача 6. Маша, Катя, Ваня и Коля поздравили друг друга с Новым годом, подписав открытки. Сколько всего открыток было подписано друзьями? Кому подписала открытки Маша?

Задача 7. Составь всевозможные трехзначные числа из цифр 2, 3, 6, 5. Выбери самый надежный способ для записи всех таких чисел.

2. В работах Е. Е. Белокуровой [15] выделяется три этапа обучения детей решению комбинаторных задач. Рассмотрите

таблицу, отражающую цель каждого этапа и приемы реализации каждого этапа. Приведите пример комбинаторной задачи и разработайте фрагменты урока для работы над этой задачей на каждом этапе.

Название этапа	Цель этапа	Приемы выполнения этапа
Подготовительный	Формирование мыслительных операции в процессе решения комбинаторных задач с помощью хаотического перебора	Драматизация, обыгрывание задачи, построение модели (рисунок, схема), решение задачи с помощью практического действия
Основной	Ознакомление с методом систематического перебора всех возможных вариантов	Построение модели (таблица, граф, дерево возможных вариантов) под руководством учителя
Этап отработки умения выполнять организованный перебор	Отработка умения выполнять систематический перебор	Построение модели (таблица, граф, дерево возможных вариантов) самостоятельно

Список использованной литературы

1. Актуальные проблемы методики обучения математике в начальных классах [Текст] / под ред. М. И. Моро, А. М. Пышкало. – М., 1977.

2. Александрова, Э. И. Методика преподавания. Математика. [Текст] / Э. И. Александрова // Вестник образования. – М. : Сентябрь 18, 2000.

3. Александрова, Э. И. Особенности формирования навыков при обучении математике по системе Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова [Текст] / Э. И. Александрова // Начальная школа. – 2005. – № 3.

4. Бантова, М. А. Методика начального обучения математике. [Текст] / М. А. Бантова, Г. В. Бельтюкова. – М. : Просвещение, 1984.

5. Белокурова, Е. Е. Методика обучения решению комбинаторных задач [Текст] / Е. Е. Белокурова. // Начальная школа. – 1994. – № 12.

6. Белокурова, Е. Е. Обучение решению комбинаторных задач с помощью таблиц и графов [Текст] / Е. Е. Белокурова. // Начальная школа. – 1995. – № 1.

7. Белокурова, Е. Е. Характеристика комбинаторных задач [Текст] / Е. Е. Белокурова. // Начальная школа. – 1994. – № 1.

8. Белошистая, А. В. Методика обучения математике в начальной школе : курс лекций [Текст] : учеб. пособие для студентов высш. пед. учеб. заведений / А. В. Белошистая. – М. : Гуманитар. изд. центр «ВЛАДОС», 2005.

9. Боданский, Ф. Г. Развитие математического мышления у младших школьников [Текст] / Ф. Г. Боданский // Развитие психики школьников в процессе учебной деятельности : сб. науч. трудов. – М., 1983. – С. 115-125.

10. Виноградова, Е. П. Комбинаторные задачи в системе

развивающего обучения четырехлетней начальной школы [Текст] : автореф. дис. … канд. пед. наук :13.00.02 / Виноградова Е.П. – М., 2003.

11. Виноградова, М. Д. Коллективная познавательная деятельность и воспитание школьников. [Текст] / М. Д. Виноградова, К. Б. Первин. – М. : Просвещение, 1977.

12. Власова, И. Н. Комбинаторно-вероятностные задачи в начальном обучении математике [Текст] / И. Н. Власова // Начальная школа. – 2012. – № 1.

13. Воробьева, Г. В. Элементы стохастики в начальной школе [Текст] / Г. В. Воробьева // Современные проблемы математического образования в период детства : коллективная монография / В. В. Артемьева [и др.] ; под общ. ред. проф. Л. В. Ворониной. – Екатеринбург : ФГБОУ ВПО УрГПУ, 2015.

14. Воронцов, А. Б. Педагогические технологии контроля и оценки учебной деятельности (система Д.Б. Эльконина-В.В. Давыдова) [Текст] / А. Б. Воронцов. – М. : Издатель Рассказов А.И., 2002.

15. Гальперин, П. Я. Формирование умственных действий. [Текст] / П. Я. Гальперин // Хрестоматия по общей психологии: психология мышления – М., 2001.

16. Давыдов, В. В. Формирование учебной деятельности школьников [Текст] / В. В. Давыдов. – М., 1982.

17. Демидова, Т. Е. Элементы стохастики в начальной школе [Текст] / Т. Е. Демидова, С. А. Козлова, А. Г. Рубин, А. П. Тонких // Начальная школа плюс до и после. – 2005. – № 5.

18. Дрозд, В. А. Методика начального обучения математике [Текст] / В. А. Дрозд. – Минск : Всетка, 2007.

19. Дьяченко, В. К. Сотрудничество в обучении. [Текст] / В. К. Дьяченко. – М. : Просвещение, 1991.

20. Житомирский, В. Г. Геометрия для малышей. [Текст] / В. Г. Житомирский, Л. Н. Шеврин. – М. : Просвещение, 1975.

21.Зайцева, С. А. Методика обучения математике в начальной школе [Текст] / С. А. Зайцева, И. Б. Румянцева, И. И. Целищева. – М. : Гуманитар. ИЦ «ВЛАДОС», 2008.

22.Занков, Л. В. Развитие школьников в процессе обучения [Текст] / Л. В. Занков. – М., 2007.

23.Истомина, Н. Б. Математика. Учимся решать комбинаторные задачи. Тетрадь для 1-4 кл. [Текст] / Н. Б. Истомина, Е. П. Виноградова. – М. : Ассоциация 21 века, 2004.

24.Истомина, Н. Б. Методика обучения математике в начальных классах [Текст] : учебное пособие для студентов ф-тов подготовки учителей нач. кл. пед. ин-тов, колледжей и училищ / Н. Б. Истомина. – М. : ЛИНКА-ПРЕСС, 1997.

25.Истомина, Н. Б. Методика работы над уравнением [Текст] / Н. Б. Истомина, Г. Г. Шмырева. // Начальная школа. – 1983. – № 9.

26.Как проектировать универсальные учебные действия в начальной школе: от действия к мысли [Текст] : пособие для учителя / А. Г. Асмолов, Г. В. Бурменская, И. А. Володарская [и др.] ; под ред. А. Г. Асмолова. – М. : Просвещение, 2008.

27.Калинина, Н. В. Учебная самостоятельность младшего школьника: диагностика и развитие [Текст] : практическое пособие / Н. В. Калинина, С. Ю. Прохорова. – М. : АРКТИ, 2008.

28.Кек, М. С. Алгоритмические предписания при обучении решению уравнений [Текст] / М. С. Кек. // Начальная школа. – 1975. – № 2.

29.Методика начального обучения математике [Текст] / под общ. ред. А. А. Столяра, В. Л. Дрозда. – Минск : Высшая школа, 1988. – С. 199-202, 207-220.

30.Методика обучения геометрии [Текст] : учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Гусев, В. В. Орлов, В. А. Панчишина [и др.] ; под ред. В. А. Гусева. – М.: Издательский центр «Академия», 2004.

31. Микулина, Г. Г. Использование условного обозначения чисел при обучении математике [Текст] / Г. Г. Микулина. // Начальная школа. – 1984. – № 6.

32. Оценка достижения планируемых результатов в начальной школе. Система заданий [Текст] : в 2 ч. / М. Ю. Демидова, С. В. Иванов, О. А. Карабанова [и др.] ; под ред. Г. С. Ковалевой, О. Б. Логиновой. – М. : Просвещение, 2010. – Ч. 1.

33. Петерсон, Л. Г. Как научить детей решать уравнения [Текст] / Л. Г. Петерсон // Математика в школе. – 1994. – № 3.

34. Подходова, Н. С. Геометрия. 5 класс [Текст] : учеб. пособие / Н. С. Подходова. – СПб. : Дидактика, 1995.

35. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Начальная школа [Электронный ресурс]. – URL: http://school-russia.prosv.ru/info. aspx?ob_no =25561.

36. Примерные программы по учебным предметам. Начальная школа [Текст] : в 2 ч. – М. : Просвещение, 2010. – Ч. 1.

37. Пышкало, А. М. Методика обучения элементам геометрии в начальных классах. [Текст] : пособие для учителей и студентов / А. М. Пышкало. – М. : Просвещение, 1970.

38. Репкина, Г. В. Оценка уровня сформированности учебной деятельности [Текст] / Г. В. Репкина, Е. В. Заика. – Томск : Пеленг, 1993.

39. Ручкина, В. П. Дифференцированные задания по математике для начальных классов [Текст] / В. П. Ручкина. – Екатеринбург : Изд-во УГПУ, 2002.

40. Ручкина, В. П. Курс лекций по методике обучения математике в начальных классах. [Текст] : учебное пособие / В. П. Ручкина, Г. П. Калинина, Г. В. Воробьева. – Екатеринбург : Издатель Калинина Г.П., 2009.

41. Ручкина, В. П. Курс лекций по теории и технологии обучения математике в начальных классах [Текст] : учеб. пособие / В. П. Ручкина. ; ФГБОУ ВО «Урал. гос. пед. ун-т» – Екате-

ринбург, 2016. – 314 с.

42. Ручкина, В. П. Методика математики в начальных классах [Текст] : учебное пособие / В. П. Ручкина, Л. В. Воронина. – Екатеринбург : Издатель Калинина Г.П., 2008.

43. Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике. Практика [Текст] / Г. И. Саранцев. – М., 1995.

44. Стойлова, Л. П. Математика [Текст] : учеб. пособие для студентов сред. пед. учеб. заведений / Л. П. Стойлова. – М. : ИЦ «Академия», 1998.

45. Талызина, Н. Ф. Формирование познавательной деятельности младших школьников [Текст] / Н. Ф. Талызина. – М., 1987.

46. Теоретические и методические основы изучения математики в начальной школе [Текст] / А. В. Тихоненко, [и др.] ; под ред. проф. А. В. Тихоненко. – Ростов н/Д. : Феникс, 2008.

47. Тихоненко, А. В. Технология изучения понятия величины на уроках математики в начальной школе [Текст] / А. В. Тихоненко. – Ростов н/Д. : Феникс, 2006.

48. Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования [Текст]. – М. : Просвещение, 2010.

49. Фридман, Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе [Текст] / Л. М. Фридман. – М., 1983.

50. Фройденталь, Г. Математика как педагогическая задача [Текст] : пособие для учителей : в 2 ч. / Г. Фройденталь ; под ред. Н. Я. Виленкина. – М., 1982. – Ч. 1.

51. Хлебникова, Л. И. Справочник школьника по математике. 1-4 классы [Текст] / Л. И. Хлебникова. – СПб. : Издательский Дом «Литера», 2013.

52. Цирулик, Н. А. Некоторые приемы работы с уравнениями [Текст] / Н. А. Цирулик // Начальная школа. – 1979. – №

4.
53.Шадрина, И. В. Обучение математике в начальных классах [Текст] : пособие для учителей, родителей, студентов педвузов / И. В. Шадрина. – М. : Школьная Пресса, 2003.
54.Шихалев, Х. Ш. Единый подход к решению уравнений и неравенств [Текст] / Х. Ш. Шихалев. // Начальная школа. – 1989. – № 8.

Учебное издание

Валентина Павловна Ручкина

Курс лекций по теории и технологии обучения математике в начальных классах

Часть 2

Компьютерный набор: В.П. Ручкина
Редактирование: Г.П. Калинина
Макетирование: Г.П. Калинина
Корректура: Г.П. Калинина

Уральский государственный педагогический университет.
620017 Екатеринбург, пр-т Космонавтов, 26.
E-mail: uspu@uspu.me