Малиновская Галина Михайловна,
старший преподаватель кафедры математики
и методики обучения математике АлтГПУ

Уравнения с одной переменной: их виды и способы решения.

1. Роль линии уравнений и неравенств в курсе математики.

Уравнение как общематематическое понятие многоаспектно. Это можно проиллюстрировать, выделив главные области возникновения и функционирования понятия «уравнение»:

- как средства решения текстовых задач;
- особого рода формулы, служащей в алгебре объектом изучения;
- формулы, которой косвенно определяются числа или координаты точек плоскости (пространства), служащие его решением.

Названным областям соответствуют три основных направления развертывания линии уравнений и неравенств в школьном курсе алгебры.

Прикладная направленность. Будучи математической моделью реальных процессов, уравнение первоначально возникает как обобщение метода решения сюжетных задач арифметическим способом, а затем используется при решении текстовых задач, фабула которых отражает многообразные реальные процессы окружающего мира и тесно связана с изучением многих предметов (химия, биология, физика, экономика и др.). Данный аспект линии уравнений и неравенств во многом обеспечивает мотивацию изучения школьного курса математики в целом, отражает связь с линией сюжетных задач. При решении текстовых задач ведущим аппаратом является математическое моделирование, а одним из средств построения модели и разрешения проблемной ситуации в ее рамках – уравнения, неравенства и их системы.

Теоретико - математическая направленность раскрывается в двух аспектах:

- выделение и изучение наиболее важных классов уравнений, неравенств и систем;
- изучение обобщенных понятий, относящихся ко всей линии в целом, что позволяет сформировать обобщенный аппарат теории. Реализуя этот аспект, необходимо выделить общие понятия линии: неизвестное, равенство, уравнение, корень уравнения, неравенство, область или множество определения уравнений (неравенств), система и совокупность уравнений; система и совокупность неравенств; множество решений, равносильность, логическое следствие, общие и частные методы решения. Это направление указывает на связь с таким методологическим разделом, как «Элементы логики».

Линия уравнений и неравенств тесно связана с числовой линией, причем эта связь – двусторонняя. История науки свидетельствует, что в ряде случаев необходимость расширения числовых множеств была связана с расширением уравнения (введением иррациональных и комплексных чисел). С другой стороны, расширение числового множества позволяет составлять и решать новые типы уравнений, неравенств и их систем.

Линия уравнений и неравенств также тесно связана с функциональной линией. Методы, разработанные в теории уравнений и неравенств, применимы к исследованию функций (элементарные методы исследования функций с целью построения графика). Аппарат линии функции (график и графическое представления) привлекается к исследованию уравнений, неравенств и их систем. Само уравнение можно рассматривать как равенство значений функций.

Также следует особо отметить связь рассматриваемой линии с теорией тождественных преобразований. Последняя приобретает новое содержание и смысл при изучении равносильных преобразований уравнений и неравенств. В свою очередь, владение содержанием линии уравнений и неравенств позволяет расширить список выполнимых преобразований. Так, умение решать квадратные уравнения позволяет осуществлять сокращение дробей, в числителе или знаменателе которых имеется квадратный трехчлен.

2. Основные понятия линии уравнений и неравенств.

Уравнение представляет собой некоторую запись, составленную по определенным правилам (синтаксический подход). Заменяя в записи буквы (переменные) конкретными числами, переходят к верным или неверным равенствам (высказываниям – логический подход). Стоящие в левой и правой частях уравнения выражения задают функции, значения которых связаны знаком «=» (функциональный подход). Действия над уравнениями производятся по некоторым правилам (операционный подход). Задание «решить уравнение» предполагает отыскание всех его корней (целевой подход).

На практике понятие уравнения может быть введено посредством выделения его в результате решения задач алгебраическим методом. В этом случае существенным является подход к понятию уравнения, при котором уравнение представляет косвенную форму задания некоторого неизвестного числа, имеющего в соответствии с сюжетом конкретную математическую интерпретацию (модельный подход). Указанный способ введения понятия уравнения соответствует прикладному аспекту понятия уравнения, отраженному в следующем определении.

Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением. Корнем уравнения называется то значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Существует другой вариант определения уравнения: «Равенство с переменной называется уравнением. Значение переменной, при котором равенство с переменной обращается в верное числовое равенство, называется корнем уравнения». Это определение характеризует уравнение как предикат особого вида, а корень уравнения – число из множества истинности этого предиката. Термин «уравнение» несет в себе признаки знакового компонента, а термин «корень уравнения» учитывает смысловой компонент.

Можно встретить и третий вариант определения, роль которого проявляется при изучении графического метода решения уравнений: «Уравнение – это равенство двух функций».

Уравнения классифицируются по виду функций, изучаемых в школе.

В школьных учебниках равносильные преобразования используются при решении уравнений (неравенств) после (или до) введения понятия равносильности.

Выделяются три основных типа преобразований.

1. Преобразование одной из частей уравнения или неравенства. Используется при необходимости упрощения выражения в какой-то из частей уравнения или неравенства. Имеется возможность перехода к неравносильной модели. Основой преобразований данного типа являются тождественные преобразования, поэтому классифицировать их можно в соответствии с классификацией тождественных преобразований (раскрытие скобок, приведение подобных слагаемых, приведение к общему знаменателю и др.).

2. Согласованное изменение обеих частей уравнения (неравенства). На основе основных свойств числовых равенств (неравенств) с одним неизвестным, например (для неравенств):

- к обеим частям неравенства можно прибавлять (вычитать) одно и то же число, при этом знак неравенства не меняется;
- обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю; если это число положительно, то знак неравенства не меняется, а если это число отрицательно, то знак неравенства меняется на противоположный.

3. Преобразования, имеющие логическую структуру. Можно выделить два подтипа:

- преобразования, осуществляемые на основе свойств арифметических операций. К ним можно отнести переход от уравнения к совокупности уравнений после предварительного разложения на множители; переход от уравнения к системе после приравнивания суммы квадратов выражений к нулю; почленное сложение, умножение, деление уравнений, неравенств и т.д.;
- преобразования, осуществляемые при помощи логических операций. Примерами их являются выделение из системы одного из компонентов, замена переменных.

3. Изучение линии уравнений и неравенств в школе.

При изучении математики в 5-6 классах представления учащихся о решении уравнений (видах, методах решения, количестве корней) значительно расширяются.

Решаемые на основе связи между компонентами и результатами действий уравнения включают новые числа (сначала дробные, потом целые или наоборот).

Появляется новый тип уравнений, записанных в виде равенства двух частных, и с ними – задание «решите пропорцию», выполняемое на основе связи между членами пропорции. Используя определение модуля числа, ученики решают уравнение $|x| = a$. Уравнение с неизвестным под знаком модуля – первое предусмотренное программой обучения уравнение, которое может иметь отличное от единицы количество корней. Изучение степени натурального числа дает обширный материал для решения уравнений подбором. Знакомство с отрицательными числами позволяет переносить члены уравнения из одной части уравнения в другую, заменяя их знаки на противоположные.

С началом систематического курса алгебры основное внимание уделяется способам решения линейных и квадратных уравнений и неравенств, которые становятся специальным объектом изучения. Умение решать линейные и квадратные уравнения и неравенства служит базой для решения других типов уравнений, неравенств и их систем (дробных рациональных, иррациональных, высших степеней).

Изучение линии уравнений и неравенств тесно связано с формированием умения у учащихся решать уравнения и неравенства графическим способом, исследовать решения в зависимости от параметра и т.д. вопросы о виде решения квадратного неравенства, о количестве решений системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными решаются с использованием графиков соответствующих функций. Частным случаем графического метода является метод интервалов.

Конечно, решение разных видов уравнений желательно рассматривать и на аналитическом, и на графическом уровне. Свободное мысленное создание и оперирование графиком квадратичной функции позволит ученикам быстро находить корни квадратного уравнения и решения квадратных неравенств, а также не допускать ошибки при решении квадратных неравенств, имеющих бесконечное множество решений. Рассматривая квадратное уравнение с учащимися, необходимо приучать их параллельно рисовать или представлять график соответствующей квадратичной функции (квадратного трехчлена). Для этого следует постоянно обращаться к шести рисункам, на которых изображены графики квадратичной функции $y = ax^2 - bx + c$ для случаев $a > 0$ и $a < 0$ и трех подслучаев для значений дискриминанта для каждого: $D > 0, D = 0,\ D < 0$.

Отметим еще одну особенность изучения квадратных уравнений. При изучении теоремы о формуле корней квадратного уравнения необходимо после ее введения среди уравнений, решаемых с помощью этой формулы, предложить учащимся решить уравнения, которые рациональнее решать другими способами, например, используя формулы сокращенного умножения или вынесением общего множителя. Иначе ученики будут использовать эту формулу во всех ситуациях, даже когда это нерационально.

Определенной психологической перестройки требует изучение понятия решения системы уравнений с двумя неизвестными, когда решением служат два числа, взятых в определенном порядке, - упорядоченная пара. Приемы решения систем линейных уравнений (подстановка, сложение, графический способ), осваиваемые школьниками, являются общими и переносятся на решение любых систем.

Решение биквадратных уравнений и схожих с ними требует замены неизвестного. Этот прием также относится к общим.

Уровневая дифференциация изучения линии уравнений и неравенств может быть достигнута на этапе закрепления и применения знаний за счет включения в систему упражнений заданий с модулем и параметром.

Библиографический список литературы:

1. Методика обучения математике. В 2 ч. Часть 1 : учебник для академического бакалавриата / под ред. Н.С. Подходовой, В.И. Снегуровой. – Москва : Издательство Юрайт, 2017. – 274 с.

2. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ. -мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В. И. Мишин. – Москва : Просвещение, 1987. – 416 с.