Бронникова Лариса Михайловна,
кандидат педагогических наук, доцент

Теория вероятностей и статистика.

Вероятность. Элементы комбинаторики

Раздел «Вероятность и статистика» – обязательный компонент школьного образования. Этот материал необходим для формирования у учащихся умения воспринимать и критически анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей, производить простейшие вероятностные расчеты.

Представление раздела «Вероятность» в ФГОС ООО распределены на 7-9 классы следующим образом:

7 класс – случайный эксперимент (опыт) и случайное событие, вероятность и частота, роль маловероятных и практически достоверных событий в природе и обществе, монета и игральная кость в теории вероятности;

8 класс – случайные события, противоположные события, несовместные события, независимые события, действия с событиями;

9 класс – геометрическая вероятность, испытания Бернулли, случайная величина (характеристики случайных величин), понятие о законе больших чисел, роль и значение закона больших чисел в природе и обществе.

Представление раздела «Элементы комбинаторики» в ФГОС ООО заключено в рамках 9 класса: перестановки и факториал, сочетания и число сочетаний, размещение и число размещений, треугольник Паскаля, решение задач с использованием комбинаторики.

Базовым понятием теории вероятностей является случайный эксперимент или случайный опыт. Это синонимы. Теория вероятностей рассматривает случайные события не сами по себе, а в рамках случайных опытов (случайных экспериментов). Случайный опыт – это условия и обстоятельства, в рамках которых мы рассматриваем случайные события.

Опыт оканчивается одним и только одним из элементарных событий.

Наряду с термином «элементарное событие» можно употреблять термин «исход». В школе для обозначения различных элементарных событий используют начальные строчные латинские буквы: a, b, c, d...

Перечисляя возможные исходы случайного опыта, мы приходим к совокупности всех элементарных событий. Эту совокупность часто называют пространством элементарных событий. Слово «пространство» в школе следует рассматривать не как строго определенный термин, а лишь как образное выражение, призванное вызвать геометрические ассоциации. Эту совокупность элементарных исходов можно называть также множеством всех элементарных событий или исходов. Математическая теория вероятностей, с которой многие школьники встретятся в вузах, использует термин «пространство» в строгом смысле, однако делать это в школе совершенно не обязательно.

Каждое случайное событие, кроме невозможного, состоит из элементарных событий. Про исходы, при которых происходит событие A, говорят, что они благоприятствуют событию A. Сами такие исходы называют благоприятствующими событию A или благоприятными для события A. От длинного и неудобного слова «благоприятствующие» в дальнейшем можно отказаться. Важно, чтобы учащиеся понимали, что случайные события состоят из элементарных событий, объединяют некоторую их часть.

Вероятность любого случайного события – это некоторое число, заключенное между нулем и единицей. Под вероятностью случайного события понимают числовую меру правдоподобия этого события.

Учащиеся должны понять, что не существует единого и универсального способа определения вероятности событий.

- Иногда вероятности элементарных событий назначают из соображений симметрии (например, вероятности выпадения орла и решки при бросании монеты).

- Иногда вероятности можно оценить (найти приближенно) с помощью многократных экспериментов (например, вероятность поломки телевизора определенной модели в течение гарантийного срока).

- Иногда вероятности элементарных событий удается вычислить, исходя из известных вероятностей других событий (например, можно найти, что при бросании двух монет вероятность выпадения двух орлов равна 0,25, зная, что при бросании одной монеты вероятность орла равна 0,5).

- Иногда вероятности событий не удается ни назначить, ни оценить, ни вычислить никаким способом. Такие события в рамках теории вероятностей не рассматриваются (например, вероятность того, что в 2050 году будет найдена новая форма жизни).

Предположим, что в некотором опыте рассматривается случайное событие А, и такой опыт можно повторять много раз, при этом каждый раз независимо от предыдущих. Отношение числа опытов, в которых событие А произошло, к общему числу проведённых опытов, называют частотой данного случайного события в этой серии опытов. Вероятности и частоты связаны. Если опыт повторить достаточно много раз, то частота события будет близка к его вероятности.

Тема «Геометрическая вероятность», входящая в общеобразовательный стандарт, в большой степени является данью исторической традиции изучения вероятностей. При работе с этим материалом учитель и учащиеся получают возможность повторить материал курса геометрии и укрепить навыки формализации текстовых вероятностных задач, используя различные геометрические объекты.

Иногда в разговоре, в средствах массовой информации и в некоторых книгах можно прочесть или услышать выражение: «вероятность составляет 50%». Мы предлагаем не измерять вероятности в процентах. Четкое представление о том, что вероятность – число и что она не может быть больше единицы, позволяет учащимся избегать ошибок при вычислении вероятностей, дает им дополнительный инструмент контроля возможных ошибок.

Среди всех случайных событий выделяют события двух специальных видов. Достоверные события, то есть те, которые в результате эксперимента происходят непременно, и невозможные события, то есть те, которые в результате эксперимента точно не происходят. Слова «достоверное» и «невозможное» – являются общепринятыми терминами в теории вероятностей. Нужно помнить, что достоверное и невозможное события тоже считаются случайными событиями, несмотря на то, что их вероятности точно известны. При этом вероятность невозможного события равна нулю, а вероятность достоверного события равна единице.

В опытах, в которых все элементарные события имеют одинаковые шансы, вероятности всех их равны между собой, говорят о равновозможных событиях. Практически все опыты с равновозможными событиями – искусственные. Тем не менее, изучение этих опытов важно и нужно.

На практике нас часто интересуют различные комбинации событий и их вероятности.

В школьном курсе рассматриваются понятия «противоположное событие», «объединение событий» и «пересечение событий». Рассматриваются и простейшие комбинации действий над событиями.

Если пересечение событий A и B не содержит ни одного элементарного события, то говорят, что события A и B несовместны. Их пересечение – невозможное событие. Для него используется принятое в теории множеств обозначение $\varnothing$.

Учащиеся знакомятся с операциями между двумя событиями: суммой (объединением) и произведением (пересечением).

Формула сложения вероятностей для непересекающихся (**несовместных**) событий A и B имеет вид:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Эта формула обобщается на случай произвольных событий A и B:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Заметим, что в этих формулах складываются и вычитаются числа – вероятности событий, а не сами события.

Формула произведения вероятностей независимых событий записывается так:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Опять же речь идет об умножении вероятностей, а не событий.

Большое внимание в основной школе уделяется задачам с монетами и игральным кубиком (игральной костью). Монета в теории вероятностей – инструмент, с помощью которого можно получать два равновозможных исхода (вероятность выпадения каждой стороны равна 1/2). Игральный кубик позволяет получить шесть равновозможных исходов (вероятность выпадения каждой стороны равна 1/6). Эти объекты – математические модели без размера, цвета, веса. На опытах с монетами и кубиками легко и удобно учиться теории вероятностей, также с их помощью можно моделировать довольно сложные и важные эксперименты.

Схема испытаний Бернулли является не только простой, полезной и распространенной на практике моделью описания однотипных повторяющихся независимых опытов с двумя возможными исходами. Она играет в теории вероятностей важную методическую роль, показывая как получить примерное представление о вероятности многих интересующих нас событий. Сама по себе схема испытаний Бернулли объединяет целый ряд понятий и методов, изученных ранее. Это представления о множество всех элементарных событий, понятие независимости событий, правило умножения вероятностей, представление о числе сочетаний. То есть эта важная тема дает возможность повторить и закрепить многое из уже пройденного материала.

Умение вычислять математическое ожидание и дисперсию для числа успехов дают нам возможность сформулировать один из основных законов теории вероятностей – закон больших чисел. Он важен не только с точки зрения математики, но несет еще и большую мировоззренческую нагрузку, показывая, что усреднение случайных величин позволяет нам получить более точное представление об окружающем мире. На бытовом уровне одной из иллюстраций закона больших чисел служит поговорка: семь раз отмерь – один отрежь! Заметим, что неявное обсуждение закона больших чисел мы начинаем при разборе ряда статистических задач в 7 классе, обсуждая случайную изменчивость различных величин. Уже там мы обращаем внимание на то, что средние значения однотипных наборов различных случайных величин заметно меньше отличаются друг от друга, чем сами случайные величины в наборах. Другими словами, закон больших чисел показывает наличие закономерности в случайном, устанавливает связь между ними.

Как было сказано выше, раздел «Элементы комбинаторики» рассматривается в 9 классе и включает в себя изучение перестановок, сочетаний, размещений и треугольника Паскаля.

Главная задача комбинаторики в курсе вероятности состоит в том, чтобы учащиеся получили представление об изменчивости, о различных вариантах и их числе, которые могут возникнуть во многих житейских ситуациях. Разбор элементарных комбинаторных задач в школьном курсе следует начинать с обычного перечисления вариантов, получаемых естественным образом, а не с заучивания формальных обозначений. Комбинаторное правило умножения также вытекает из подобных задач естественным, интуитивно понятным образом. Точно так же следует подходить и к задачам на перестановки. Сначала учащиеся должны на простых примерах понять, что в задаче о перестановке трех элементов на первое место может претендовать любой из трех элементов, на второе – любой из двух оставшихся, а на последнее – только один, не выбранный ранее. Нужно научиться выписывать все возможные перестановки в подобных задачах. И лишь затем переходить к формальному описанию числа перестановок с помощью факториала. Формальное вычисление факториала следует закрепить, так как оно возникает во многих комбинаторных задачах.

Большую вспомогательную роль при первичном знакомстве с комбинаторными правилами могут сыграть графы. Построение дерева вариантов (дерева перебора) иллюстрирует не только правило умножения, но и дает школьнику естественный алгоритм несложного перечисления.

В процессе изучения разделов теории вероятностей и математической статистики школьники усваивают в целом простые, но принципиально новые для них понятия, формируют современное мировоззрение, умение ориентироваться в изменчивом мире.