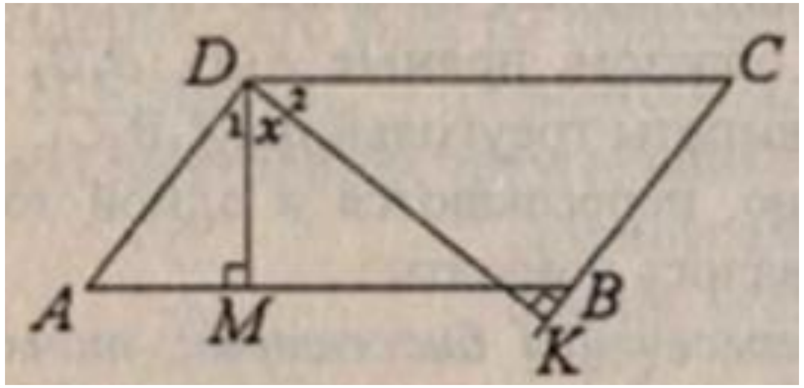
Параллелограмм. Прямоугольник. Ромб. Квадрат. Трапеция. Окружность. Касательная к окружности. Касательные и хорды. Вписанные и описанные многоугольники.

Лектор: Кисельников Игорь Васильевич , к.п.н.,
доцент кафедры математики и методики обучения математике



1. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.

2. Угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины его тупого угла, равен острому углу параллелограмма, а угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины его острого угла, равен тупому углу параллелограмма.

Дополнительные свойства параллелограмма

Пусть DM и DK – высоты параллелограмма ABCD.

Обозначим искомый угол x, $x=\angle ADC-(\angle 1+\angle 2)$ (*)

ABCD– параллелограмм, откуда $\angle A=\angle C$, $\angle ABC=180°-\angle A$. Из треугольников ADM и CDK находим

$\angle 1=90°-\angle A$, $\angle 2=90°-\angle C$. После подстановки выражений для ΔADC, $\angle 1$ и $\angle 2$ в формулу (*)

получаем $x=180°-\angle A-(180°-2\angle A)=\angle A$, что и требовалось доказать.

Свойства равнобедренной трапеции

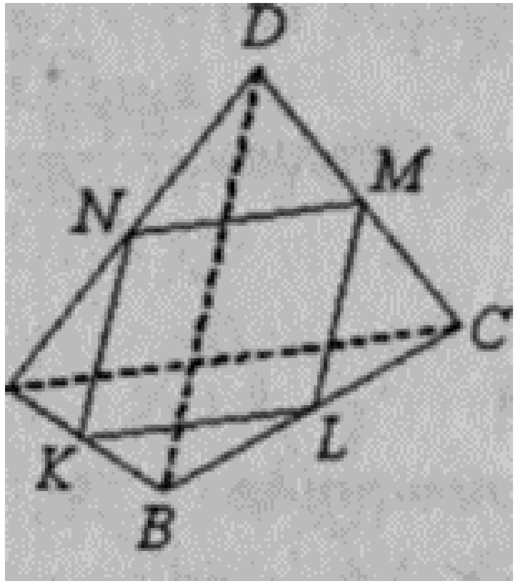
1. Диагонали трапеции равны тогда и только тогда, когда эта трапеция равнобедренная.

2. Углы при каждом основании трапеции равны тогда и только тогда, когда эта трапеция равнобедренная.

3. Высота, опущенная из вершины тупого угла равнобедренной трапеции, делит большее основание трапеции на два отрезка, больший из которых равен полусумме оснований, а меньший — полуразности оснований.

Теорема 2. (теорема Вариньона) Середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма, стороны которого равны половинам диагоналей данного четырехугольника, а площадь - половине площади данного четырехугольника.

Доказательство. 1. Отрезок KL – средняя линия треугольника ABC, откуда KL|| AC, KL=AC/2. С другой стороны, отрезок MN – средняя линия треугольника ACD, откуда MN || AC, MN = AC/2. Таким образом, отрезки KL и MN равны и параллельны, следовательно, KLMN– параллелограмм.
Аналогично доказывается ML = KN = BD/2 .
2. Доказательство того, что площадь параллелограмма KLMN равна половине площади четырехугольника ABCD, можно выполнить на основе факта того, что средняя линия отсекает от данного треугольника подобный ему треугольник с коэффициентом подобия 0,5.



Свойства правильного многоугольника

1. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

2. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

3. Центр окружности, вписанной в правильный многоугольник, совпадает с центром описанной около него окружности. Эта точка называется центром правильного многоугольника.

Пусть r – радиус окружности, d – ее диаметр, C – длина окружности, S – площадь круга, l_{n° – длина дуги в n градусов, l_α – длина дуги в a радиан, S_α – площадь сектора, ограниченного дугой в α градусов, S_a – площадь сектора, ограниченного дугой в α радиан.

1. $d = 2r$
2. $C=2\pi r$
3. $S=\pi r^2$
4. $l_{n^\circ}=\pi rn/180$
5. $l_\alpha =\alpha r$
6. $S_{n^\circ}=\pi r^2 n/360$
7. $S_\alpha=\alpha r^2/2$

Доказательство

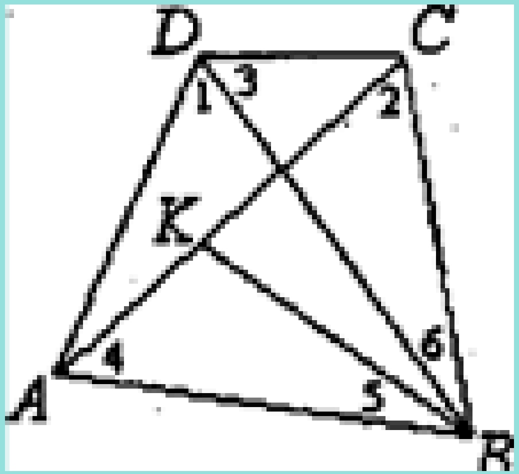
Отложим от луча BA угол ABK (K принадлежит AC), равный углу CBD через ∠1 и ∠ 2 – вписанные, опирающиеся на дугу AB, ∠ 3 и ∠ 4 – вписанные, опирающиеся на дугу BC, ∠ 5 и ∠ 6 – по построению. Т. о., ∠ 1= ∠ 2, ∠ 3= ∠ 4, ∠ ABD = ∠ CBK, следовательно:

ΔABK~ ΔDBC, следовательно, $AK=(AB\cdot CD)/BD$ (1)

ΔBCK~ ΔBDA, следовательно, $CK=(AD\cdot BC)/BD$ (2)

Почленно сложив (1) и (2), после преобразования получим $AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$.

Теорема Птолемея. Произведение диагоналей четырехугольника, вписанного в окружность, равно сумме произведений противоположных сторон этого четырехугольника.



Пример . Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Через точку K, лежащую на стороне CD и точки B и D проведена другая окружность, пересекающая луч DA в точке M. Найдите AM, если AB = a, BC = b, CK = m.