**Практическая работа 7.5**

**Задание:**

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с внутренней точкой противоположной стороны, называется чевианой треугольника.

**Теорема Чевы.** Три чевианы $AA\_{1}$, $BB\_{1}$, $CC\_{1}$ треугольника ABC пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется условие

$\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}∙\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}∙\frac{BC\_{1}}{C\_{1}A}=1$ (1)

Доказательство.



Необходимость. Пусть чевианы $AA\_{1}$, $BB\_{1}$, $CC\_{1}$ треугольника ABC пересекаются в точке О.

Воспользуемся свойством площадей (следствие 2) и свойством пропорции:

$$\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}=\frac{S\_{∆ABB\_{1}}}{S\_{∆CBB\_{1}}}=\frac{S\_{∆AOB\_{1}}}{S\_{∆COB\_{1}}}=\frac{S\_{∆ABB\_{1}}-S\_{∆AOB\_{1}}}{S\_{∆CBB\_{1}}-S\_{∆COB\_{1}}}=\frac{S\_{∆AOB}}{S\_{∆BOC}}$$

Аналогично, $\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}=\frac{S\_{∆AOC}}{S\_{∆AOB}}$, $\frac{BC\_{1}}{C\_{1}A}=\frac{S\_{∆BOC}}{S\_{∆AOC}}$.

Откуда $\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}∙\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}∙\frac{BC\_{1}}{C\_{1}A}=\frac{S\_{∆AOB}}{S\_{∆BOC}}∙\frac{S\_{∆AOC}}{S\_{∆AOB}}∙\frac{S\_{∆BOC}}{S\_{∆AOC}}=1$. Что и требовалось доказать.

Достаточность.

Пусть выполняется условие (1). Обозначим буквой O точку пересечения чевиан $AA\_{1}$, $BB\_{1}$, а буквой $С\_{2}$– точку пересечения луча СО со стороной AB. Отрезки $AA\_{1}$, $BB\_{1}$, $CC\_{2}$ треугольника ABC пересекаются в одной точке, следовательно, по доказанному в предыдущем пункте

$\frac{AB\_{1}}{B\_{1}C}∙\frac{CA\_{1}}{A\_{1}B}∙\frac{BC\_{2}}{C\_{2}A}=1$ (2).

Из равенств (1) и (2) получаем $\frac{BC\_{1}}{C\_{1}A}=\frac{BC\_{2}}{C\_{2}A}$ . Таким образом, точки $C\_{1} $и $C\_{2}$ совпадают, так как делят отрезок AB в одном и том же отношении, а следовательно, отрезки $AA\_{1}$, $BB\_{1}$, $CC\_{1} $пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

С помощью доказанной теоремы можно решать некоторые упражнения.

**Пример 1.** Биссектриса AK и медиана CM треугольника пересекаются в точке O, луч BO пересекает сторону AC в точке N. Найдите площадь треугольника CKN, если АВ=8, ВС=10, АС=12.

**Пример 2.** В тетраэдре АВСД биссектрисы трех плоских углов при вершине D пересекают отрезки AB, BC и AC в точках $C\_{1},A\_{1}и B\_{1}$ соответственно. Докажите, что отрезки $AA\_{1},BB\_{1}иCC\_{1} $пересекаются в одной точке.

**Требование:** четкость и ясность изложения. Объем не более **6000** знаков.