Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт педагогики и психологии детства

В.П. Ручкина

Курс лекций
по теории и технологии обучения математике в начальных классах

Учебное пособие

Екатеринбург 2016

УДК 372.22
ББК Ч426.25
Р 92

Рекомендовано Ученым советом федерального
государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»
в качестве учебного пособия (решение от 24.05.2016 № 502)

Автор:
В.П. Ручкина
кандидат педагогических наук, доцент

Рецензент:
С.А. Новоселов,
доктор педагогических наук, профессор

Ручкина, В. П.

Р 92

Курс лекций по теории и технологии обучения математике в начальных классах [Текст] : учеб. пособие / В. П. Ручкина. ; ФГБОУ ВО «Урал. гос. пед. ун-т» – Екатеринбург, 2016. – 313 с.

ISBN 978-5-7186-0768-0

Пособие составлено в соответствии с программой курса «Теория и технологии обучения математике в начальных классах» в рамках стандарта подготовки студентов по направлению «Начальные классы». В пособии раскрываются вопросы теории и технологии обучения математике младших школьников.

Пособие направлено на формирование творческого и профессионального потенциала будущего учителя начальной школы. Материалы предназначены для студентов высших и средних педагогических учебных заведений.

УДК 372.22
ББК Ч426.25

ISBN 978-5-7186-0768-0

Оглавление

Глава 1. Общие вопросы обучения младших школьников математике

1.1. Концепция современного начального математического образования

План лекции

1. Концептуальные положения начального математического образования

2. Современные концепции вариативных образовательных систем и учебно-методических комплектов

1. Концептуальные положения начального математического образования

Математика есть часть общего образования. Ни одна область человеческой деятельности не может обходиться без математических знаний и интеллектуальных качеств, развивающихся в ходе овладения этим учебным предметом. Школьное математическое образование способствует:

– овладению конкретными знаниями, необходимыми для ориентации в современном мире и для продолжения образования;

– приобретению навыков логического, алгоритмического и критического мышления;

– формированию мировоззрения, обеспечивающего понимание взаимосвязи математики с действительностью, владение математическими методами для познания действительности.

Приоритетным направлением новых образовательных стандартов является реализация развивающего потенциала общего среднего образования. Роль математики в реализации развивающего потенциала образования определена в концепции математического образования, принятой в 2014 г. [44]. Основные положения этой концепции базируются на идее личностно ориентированного обучения и направлены на осуществление в процессе обучения математике гармоничного сочетания интересов личности и общества. В концепции четко обозначен факт сосуществования в методической системе обучения математике двух генеральных функций школьного математического образования: образование с помощью математики и собственно математическое образование.

В сложившейся системе школьного математического образования функция собственно математического образования является доминирующей, что, нередко, приводит к сомнениям в необходимости изучения математики, особенно, на старшей ступени школы. Идеи личностно-ориентированного обучения также требуют пересмотра значимости этой функции с учетом современной социальной ситуации.

В контексте образования с помощью математики образовательная область «Математика» выступает как предмет общего образования. В соответствии с этой функцией главной задачей обучения математике становится не изучение основ математической науки как таковой, а общее интеллектуальное развитие – формирование у учащихся в процессе изучения математики качеств мышления, необходимых для полноценного функционирования человека в современном обществе, для динамичной адаптации человека к этому обществу Соответствующая функция математики названа общеобразовательной.

Социальная значимость собственно математического образования обусловлена необходимостью поддержания и повышения традиционно высокого уровня изучения математики, сложившегося в отечественной школе для формирования будущего кадрового научно-технического, технологического потенциала российского общества, то есть в контексте собственно математического образования образовательная область

«Математика» выступает в качестве учебного предмета специализирующего характера. Обучение математике рассматривается как элемент профессиональной подготовки учащихся к соответствующим областям деятельности после окончания школы, в том числе к получению высшего образования по соответствующим специальностям. Такая функция математики названа специализирующей.

Наряду с обозначением двух генеральных функций школьного математического образования, в концепции выделяются уровни математической подготовки.

– Общий или базовый уровень подготовки, необходимой для повседневной жизни, который должен включать важнейшие элементы курса математики, представляющие особую ценность для развития интеллекта и формирования мировоззрения обучающихся.

– Прикладной или профильный уровень – это то, чем должны обладать, будущие инженеры, технологи, экономисты и специалисты других профессий, которым предстоит применять математику в своей работе.

– Творческий уровень – это уровень подготовки будущих ученых и исследователей.

В начальной и основной школе математика является предметом общего образования и здесь выделяется два уровня – базовый и повышенный. В старшей школе предполагается частичная профессиональная ориентация учащихся и профилированные курсы математики, носящие специализирующий характер, переносятся в старшую школу. Таким образом, центральным тезисом концепции выделяется «уровневая» и «профильная» дифференциация обучения как в наибольшей степени соответствующая современным идеям российской и мировой педагогики и психологии.

С учетом гуманитарной ориентация обучения математике и понимания безусловной необходимости приобретения всеми учащимися определенного объема конкретных математических знаний и умений, цели школьного математического образования формулируются следующим образом:

– интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для полноценной жизни в обществе;

– формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, понимания значимости математики для общественного прогресса.

– формирование представлений об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;

– овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образовании.

Иначе говоря, в процессе обучения математике каждый ученик должен овладеть комплексом математических знаний, умений и навыков, необходимых для повседневной жизни и для профессиональной деятельности, содержание которой не требует использования математических знаний и для продолжения изучения математики в любой из форм непрерывного образования.

Ориентация образования не только на усвоение определённой суммы знаний, но и на развитие личности, обусловило включение в планируемые результаты образования существенного блока универсальных учебных действий: личностных, познавательных, регулятивных и коммуникативных.

В соответствии с новым стандартом [92] концептуальной основой обучения становится системно-деятельностный подход, который включает в себя реализацию идей системного, деятельностного и личностного подходов и позволяет реализовать основные положения концепции развития математического образования.

Сущность системного подхода заключается в том, что относительно самостоятельные компоненты учебного процесса рассматриваются не изолированно, а в их взаимосвязи, в системе с другими. При системном подходе педагогическая система обучения математике рассматривается как совокупность взаимосвязанных компонентов (цель математического образования в начальных классах, субъекты педагогического процесса, содержание образования, методы, формы, средства обучения), нацеленных на достижение основной цели образования – формирования личности с четкой направленностью на самопознание, саморазвитие и самореализацию.

Деятельностный подход позволяет рассматривать учебную деятельность как совместную, продуктивную деятельность педагога и ребёнка на основе сотрудничества. Для того чтобы деятельность носила развивающий характер, она должна отвечать потребностям, интересам и целям обучающегося, должна осознаваться ребёнком.

Личностный подход утверждает представления о социальной, деятельной и творческой сущности человека как личности и означает ориентацию при планировании и осуществлении педагогического процесса на личность как цель, субъект, результат и главный критерий его эффективности. Он требует признания уникальности личности, её интеллектуальной и нравственной свободы, право на уважение. В рамках данного подхода предполагается опора в воспитании на естественный процесс саморазвития задатков и творческого потенциала личности, создания для этого соответствующих условий.

Современное математическое образование базируется на следующей совокупности принципов:

– непрерывность, предполагающая изучение математики на протяжении всех лет обучения в школе;

– принцип научности, требующий отбора математических знаний, соответствующих математической науке;

– преемственность, предполагающая взвешенный учет положительного опыта, накопленного отечественным математическим образованием, и реалий современного мира;

– вариативность методических систем, предусматривающая возможность реализации одного и того же содержания на базе различных научно-методических подходов;

– дифференциация, позволяющая учащимся на всем протяжении обучения получать математическую подготовку разного уровня в соответствии с их индивидуальными особенностями (уровневая дифференциация) и предусматривающая возможность выбора типа математического образования в старшем звене (профильная дифференциация);

– принцип активности, предполагающий использование таких методов и приёмов обучения, которые ставят ребёнка в активную позицию, включение их в процесс получения и самостоятельного использования полученных математических знаний.

Перечисленные принципы создают предпосылки для гармоничного сочетания в обучении интересов личности и общества, для реализации в образовательной практике важнейшей идеи современной педагогики – личностной ориентации математического образования.

2. Современные концепции вариативных образовательных систем и учебно-методических комплектов

В начальном математическом образовании реализуется несколько образовательных систем обучения и достаточно большое число альтернативных учебно-методических комплектов (далее УМК). После утверждения и внедрения федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования второго поколения (далее ФГОС) [92] все УМК прошли доработку в плане совершенствования и обновления содержания начального математического образования в соответствие с идеями нового стандарта и концепции математического образования. В то же время, каждый учебно-методический комплект и тем более образовательная система строится на определенных концептуальных положениях. В связи с чем, содержание обучения, методический аппарат учебных дисциплин, средства ориентировки для учителя и учеников в пособиях выстраиваются в четком соответствии с требованиями ФГОС и концептуальными положениями, особенностями образовательной системы или УМК.

Основная направленность образовательной системы Л.В. Занкова – достижение оптимального общего развития младших школьников [32]. Концепция сформулирована в 60-е годы XX века. Основополагающими в ней остаются следующие положения.

Во-первых, развитие психической деятельности включает три линии: ум, волю и чувства. Развитие мыслительной деятельности предполагает классификацию предметов и понятий: анализ условий задач и заданий, формулировку выводов. Формирование обобщений ориентируется как на индуктивный, так и на дедуктивный путь в зависимости от характера знания.

Знания, умения и навыки выступают в роли средств обучения и средств организации процесса обучения. Основные требования к содержанию, методам, формам, результативности системы отвечают ее основной идее – идее создания условий для оптимального общего развития ребенка.

Результат достигается использованием развивающей методики – открытие нового знания через проблемную ситуацию (коллизию), использование многообразия методов. Автором учебника математики в данной системе является И.И. Аргинская. Содержание математического образования в данной системе направлено на реализацию следующих задач:

– способствовать продвижению ученика в общем развитии, становлению нравственных позиций личности ребенка, не вредить его здоровью;

– дать представление о математике как науке, обобщающей существующие и происходящие в реальной жизни явления и способствующей тем самым познанию окружающего мира, созданию его широкой картины;

– сформировать знания, умения и навыки, необходимые ученикам в жизни и для успешного продолжения обучения в основном звене школы.

Основные принципы системы, которые реализуются и через математическое образование предусматривают:

– обучение на высоком уровне трудности с соблюдением меры трудности;

– ведущую роль теоретических знаний;

– быстрый темп прохождения учебного материала;

– осознание школьниками процесса учения;

– систематическую работу над развитием всех учащихся, включая слабых;

– постоянную заботу о психическом и физическом здоровье всех учащихся.

Основной путь познания курса математики – индуктивный; новое знание открывается через проблемную ситуацию («коллизию»); в процессе обучения у школьников формируется активная личностная позиция к математике (математическим фактам, явлениям, понятиям, закономерностям, ситуациям практического применения знаний и умений).

В процессе обучения у младшего школьника формируются и развиваются общеучебные интеллектуальные умения: наблюдать, сравнивать, обобщать, классифицировать и др.

Ученика, обучавшегося по этому комплекту, отличает наличие таких характеристик деятельности, как анализирующее наблюдение, отвлеченное мышление, а также умение применять знания в учебных и внеучебных ситуациях.

Своеобразие концептуальных положений образовательной системы Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова [27] состоит в том, что ее применение специально направлено на формирование и развитие у младших школьников теоретического сознания и мышления на основе усвоения ими теоретических знаний в форме учебной деятельности. Главной задачей обучения математике является формирование у младших школьников математических понятий на основе содержательного обобщения. Программа построена на основе теории учебной деятельности. Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова базируется на следующей совокупности принципов: принцип поиска, принцип моделирования, принцип постановки учебной задачи, принцип содержательного обобщения.

Основным содержанием курса является формирование понятия числа, которое является стержневым для всей школьной математики. Однако, в отличие от других образовательных систем, генетически исходным отношением является отношение величин, на базе которого и формируется представление о числе.

Курс математики представлен как последовательность стратегических учебных задач: формирование понятия величины, раскрытие отношения величин как всеобщей формы числа; последовательное введение различных частных видов чисел как конкретизация общего отношения величин в определенных условиях; построение обобщенных способов действий с числами.

В ходе освоения умений учебной деятельности у младшего школьника развивается и совершенствуется способность осуществлять действия во внутреннем и внешнем плане, переходить от умственных действий к практическим и обратно.

Ученика, обучавшегося по этому комплекту, отличает теоретичность суждений, гибкость мышления, умение применять знания в новых ситуациях, организовывать и участвовать в обсуждениях.

Одна из наиболее известных в стране образовательных систем обучения, реализуемых через учебно-методический комплекс (УМК) для начальных классов «Школа России» [61] в настоящее время выстроена в идеологии системно-деятельностного подхода и на единых для всех учебных предметов основополагающих принципах:

– принцип воспитания гражданина России;
– принцип ценностных ориентиров;
– принцип обучения в деятельности;
– принцип работы на результат;
– принцип синтеза традиций и инноваций в образовании.

Ведущая целевая установка и основные средства ее реализации, заложенные в основу УМК «Школа России», направлены на обеспечение современного образования младшего школьника в контексте требований ФГОС.

Как подчеркивают авторы, «Школа России» сегодня это: мощный потенциал для духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России; реальная возможность достижения личностных, метапредметных и предметных результатов, соответствующих задачам современного образования; эффективное сочетание лучших традиций российского образования и инноваций, проверенных практиками образовательного процесса.

В основе программы и всего УМК по математике Н.Б. Истоминой [36] положена методическая концепция, выражающая необходимость целенаправленной и систематической работы по формированию у младших школьников приемов умственной деятельности: анализа и синтеза, сравнения, классификации, аналогии и обобщения в процессе усвоения математического содержания. Для реализации концепции предложен новый подход к формированию понятий и к формированию деятельности математического характера.

«Перспективная начальная школа» – научный руководитель Н.А. Чуракова [63]. Концепция учебно-методического комплекта основана на гуманистическом убеждении, что все дети способны успешно учиться в начальной школе, если для них созданы необходимые условия. Учет возраста адресата учебников делает процесс обучения успешным. Авторы комплекта ориентируются на то, что опыт ребенка – это не только его возраст, но также и тот образ мира, который определяется его общением с природно-предметной средой. Опыт ребенка – это не только опыт городской жизни с развитой инфраструктурой и разнообразными источниками информации, но и опыт сельской жизни с естественно-природным ритмом.

Как подчеркивают авторы, типическими свойствами УМК «Перспективная начальная школа» являются:

– комплектность предусматривает единство установки формирования в образовательном процессе универсальных учебных умений, обмен информацией между учебниками, демонстрацию различных точек зрения при объяснении нового материала;

– инструментальность – это предметно-методические механизмы, способствующие практическому применению получаемых знаний; это не только включение словарей разного назначения во все учебники, но и создание условий необходимости их применения; это постоянная организация специальной работы по поиску информации внутри учебника, комплекта в целом и за его пределами;

– интерактивность – интернет-адреса в учебниках комплекта рассчитаны на перспективное развитие условий использования компьютера во всех школах;

– интеграция – это стремление к созданию синтетических, интегрированных курсов, дающих школьникам представление о целостной картине мира.

Целью комплекта «Планета знаний» под редакцией И.А. Петровой [11] является создание образовательного пространства, в котором младший школьник выступает как субъект, обладающий правом выбора вида и форм учебной работы, партнера, средств и пр. Образовательное пространство УМК обеспечивает формирование, развитие и сохранение у учащихся интереса к учебной деятельности; интеллектуальное, эмоционально-ценностное, социально-личностное, познавательное, эстетическое развитие и саморазвитие ребенка; создание условий для проявления им самостоятельности и творческих способностей; сохранение и укрепление физического и психического здоровья детей путем построения для каждого ученика своей траектории усвоения учебного материала.

Содержание учебных предметов помогает ребенку воссоздавать и удерживать целостность картины мира, обеспечивает осознание им разнообразных связей между объектами и явлениями, формирует умение видеть один и тот же предмет с разных сторон. Одна из ведущих особенностей этого комплекта заключается в его целостности: единстве структуры учебников по всем классам и предметам; единстве сквозных линий типовых заданий; единстве подходов к организации учебной и внеучебной деятельности.

Вопросы для самопроверки

1. Какие составляющие можно выделить в содержании математического образования в начальных классах?
2. Перечислите разделы математики, которые включены в содержание математического образования в начальных классах?
3. Какие цели обозначены в примерной программе математического образования?
4. Какие группы УУД входят в состав содержания математического образования в начальных классах?
5. В чем заключается социальная значимость образования с помощью математики?
6. Каковы цели школьного математического образования?
7. В чем сущность высказываний «математика для всех», «математика для каждого»?
8. Раскройте ключевые направления развития методики обучения математике.
9. Какие вопросы важно получить учителю современной начальной школы при выборе УМК?:
10. Каковы концептуальные положения УМК «Начальная школа XXI века» (научный руководитель Н.Ф. Виноградова)?
11. Каковы концептуальные положения УМК системы начального образования Л.В. Занкова (научный руководитель Н.В. Нечаева)?
12. Каковы концептуальные положения УМК системы начального образования Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова?

13.Каковы концептуальные положения УМК комплект «Гармония» (научный руководитель Н.Б. Истомина)?

14.Каковы концептуальные положения УМК «Перспектива» **(**научный руководитель Л.Г. Петерсон)?

Задания для самоподготовки

1. Составьте блок схему, отражающую структуру и основное содержание примерной программы по математике, составленной в соответствии с требованиями стандарта второго поколения.

2. Сравните варианты тематического планирования в примерной программе по математике. Чем вызвано наличие трех вариантов тематического планирования?

3. Установите факт и степень соответствия преемственности в математическом образовании в ДОУ, начальной школе и 5-6 классах основной школы.

1.2. Содержание начального математического образования

План лекции

1. Общая характеристика содержания математического образования в начальных классах

2. Структура и содержание примерной программы по математике

3. Универсальные учебные действия, входящие в содержание начального математического образования

1. Общая характеристика содержания математического образования в начальных классах

Содержание образования, в том числе и математического – один из факторов экономического и социального прогресса, ориентированного на обеспечение самоопределения каждой личности, создание условий для ее самореализации [92]. В работах И.Я. Лернера, В.В. Краевского, М.Н. Скаткина, М.А. Данилова, В.С. Леднева в содержании образования выделяется четыре основных структурных элемента:

– систему знаний о природе, обществе, мышлении, технике, способах деятельности;

– систему общих интеллектуальных и практических навыков и умений, являющихся основой множества конкретных деятельностей;

– опыт творческой деятельности, обеспечивающий способность к дальнейшему развитию культуры;

– опыт эмоционально-волевого отношения к миру, друг к другу.

Современный федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования (ФГОС НОО) [92] задает ориентиры содержания математического образования в новой форме, через систему требований к предметным, метапредметным и личностным результатам обучения. Реализация последних, в различных видах деятельности обеспечивается всеми учебными дисциплинами, в том числе и математикой.

В содержании начального математического образования, условно можно выделить две составляющие: содержательно-прикладную и общекультурную.

К содержательно-прикладной составляющей мы относим:

– овладение конкретным математическим материалом необходимым в практической деятельности человека; для изучения смежных дисциплин; для продолжения образования;

– формирование представлений о некоторых, доступных младшему школьному возрасту методах математики как способов познания окружающего мира.

Общекультурная составляющая включает:

– формирование представления о математике как части общечеловеческой культуры; ее роли в развитии цивилизации;

– развитие посредством математики определенного стиля мышления;

– формирование личностных и универсальных учебных действий.

Перечисленные составляющие содержания математического образования в начальных классах определяются федеральным государственным образовательным стандартом начального общего образования второго поколения, конкретизируется в примерной программе формирования универсальных учебных действий для начального общего образования и в примерной программе по математике для начальных классов, составленной в соответствии с требованиями современного стандарта.

Анализ вышеназванных источников показывает, что школьное начальное образование включает элементы следующих разделов математики: арифметика, алгебра, геометрия, элементы статистики и теории вероятности. В своей совокупности они отражают богатый опыт обучения математике в начальных классах в нашей стране, учитывают современные тенденции отечественной и зарубежной школы.

Арифметика призвана способствовать приобретению практических навыков, необходимых для повседневной жизни. Она служит базой для всего дальнейшего изучения математики, способствует логическому развитию, формированию умения пользоваться алгоритмами, знакомству с математическими методами познания. Для реализации этих функций в курсе математики начальных классов уделяется достаточное внимание арифметическому (частично алгебраическому, геометрическому и логическому) методам решения задач, наполнению учебного материала задачами социально-экономической и жизненной тематики, культуре вычислений, осознанному усвоению алгоритмов вычислений (оценка, прикидка, сочетание устных, письменных и инструментальных вычислений).

Элементы алгебры и математического анализа направлены на формирование представлений о переменной величине, функциональной зависимости между величинами, получение школьниками представлений о функциях как важнейшей математической модели для описания и исследования разнообразных процессов. Язык алгебры в наибольшей степени показывает значение математики как искусственного языка для построения математических моделей, процессов и явлений реального мира. Одной из основных задач изучения алгебры является развитие алгоритмического мышления, необходимого, в частности, для освоения курса информатики, овладение навыками дедуктивных рассуждении.

Геометрия – одна из важнейших компонент начального математического образования, необходимая для приобретения конкретных знаний о пространстве и практически значимых умений, формирования языка описания объектов окружающего мира, для развития пространственного воображения и интуиции, для эстетического воспитания учащихся. Изучение геометрии вносит свой особый вклад в развитие логического мышления и элементов дедуктивного доказательства. Уже с первых лет обучения предусмотрено знакомство учащихся с фигурами на плоскости и в пространстве, моделирующими реальные объекты, с измерением геометрических величин, способами изображения геометрических фигур и реальных объектов. Обучение геометрии предполагает установление оптимального и дидактически оправданного баланса между наглядностью и логикой, причем соотношение наглядного и логического строго соответствует возрастным возможностям учащихся.

Элементы статистики и вероятность становятся обязательной компонентой школьного начального математического образования. Этот раздел усиливает его прикладное и практическое значение и необходим, прежде всего, для формирования функциональной грамотности – умений воспринимать и анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей, производить простейшие предположения для принятия решений.

При изучении вероятности и статистики обогащаются представления о современной картине мира и методах исследования, формируется понимание роли статистики как источника социально значимой и научной информации, закладываются основы вероятностного мышления.

2. Структура и содержание примерной программы по математике

Подробно содержательно-прикладная составляющая начального математического образования отражена в примерной программе по математике для начальной школы, составленной в соответствии с требованиями стандарта второго поколения [62]. В ней выделяется несколько крупных разделов: «Числа и величины», «Арифметические действия», «Текстовые задачи», «Пространственные отношения. Геометрические фигуры», «Геометрические величины», «Работа с данными». Раскроем содержание этих разделов.

Числа и величины

Счёт предметов. Чтение и запись чисел от нуля до миллиона. Классы и разряды. Представление многозначных чисел в виде суммы разрядных слагаемых. Сравнение и упорядочение чисел, знаки сравнения.

Измерение величин; сравнение и упорядочение величин. Единицы массы (грамм, килограмм, центнер, тонна), вместимости (литр), времени (секунда, минута, час). Соотношения между единицами измерения однородных величин. Сравнение и упорядочение однородных величин. Доля величины (половина, треть, четверть, десятая, сотая, тысячная).

Арифметические действия

Сложение, вычитание, умножение и деление. Названия компонентов арифметических действий, знаки действий. Таблица сложения. Таблица умножения. Связь между сложением, вычитанием, умножением и делением. Нахождение неизвестного компонента арифметического действия. Деление с остатком.

Числовое выражение. Установление порядка выполнения действий в числовых выражениях со скобками и без скобок. Нахождение значения числового выражения. Использование свойств арифметических действий в вычислениях (перестановка и группировка слагаемых в сумме, множителей в произведении; умножение суммы и разности на число).

Алгоритмы письменного сложения, вычитания, умножения и деления многозначных чисел.

Способы проверки правильности вычислений (алгоритм, обратное действие, оценка достоверности, прикидки результата, вычисление на калькуляторе).

Текстовые задачи

Решение текстовых задач арифметическим способом. Задачи, содержащие отношения «больше (меньше) на …», «больше (меньше) в …». Зависимости между величинами, характеризующими процессы движения, работы, купли - продажи и др. Планирование хода решения задачи. Представление текста задачи (схема, таблица, диаграмма и другие модели). Задачи на нахождение доли целого и целого по его доле.

Пространственные отношения. Геометрические фигуры

Взаимное расположение предметов в пространстве и на плоскости (выше - ниже, слева - справа, сверху - снизу, ближе - дальше, между и пр.). Распознавание и изображение геометрических фигур: точка, линия (кривая, прямая), отрезок, ломаная, угол, многоугольник, треугольник, прямоугольник, квадрат, окружность, круг. Использование чертёжных инструментов для выполнения построений. Геометрические формы в окружающем мире. Распознавание и называние: куб, шар, параллелепипед, пирамида, цилиндр, конус.

Геометрические величины

Геометрические величины и их измерение. Измерение длины отрезка. Единицы длины (мм, см, дм, м, км). Периметр. Вычисление периметра многоугольника.

Площадь геометрической фигуры. Единицы площади ($см^2$, $дм^2$, $м^2$). Точное и приближённое измерение площади геометрической фигуры. Вычисление площади прямоугольника.

Работа с информацией

Сбор и представление информации, связанной со счётом (пересчётом), измерением величин; фиксирование, анализ полученной информации.

Построение простейших высказываний с помощью логических связок и слов («и»; «не»; «если ... то …»; «верно/неверно, что …»; «каждый»; «все»; «некоторые»). Установление истинности утверждений.

Составление конечной последовательности (цепочки) предметов, чисел, геометрических фигур и др. по правилу. Составление, запись и выполнение простого алгоритма, плана поиска информации.

Чтение и заполнение таблицы. Интерпретация данных таблицы, чтение столбчатой диаграммы. Создание простейшей информационной модели (схема, таблица, цепочка).

Стандарт ориентирован не только на знаниевый, но в первую очередь, на деятельностный компонент образования.

Следуя системно-деятельностному подходу в обучении, основное содержание примерной программы представлено двумя частями: собственно математическим содержанием курса математики в начальных классах и основными видами учебной деятельности обучающихся, которые приобретают своеобразие через предметное содержание курса математики.

К основным видам учебной математической деятельности относят:

– моделирование ситуаций, требующих упорядочения предметов и математических объектов (по длине, массе, вместимости, времени), описание явлений и событий с использованием величин;

– обнаружение моделей геометрических фигур, математических процессов, зависимостей в окружающей среде;

– анализ и разрешение житейских ситуаций, требующих умения находить геометрические величины (планировка, разметка), выполнять построения и вычисления, анализировать зависимости;

– прогнозирование результата вычисления, решения задачи;

– планирование хода решения задачи, выполнения задания на измерение, вычисление, построение;

– сравнение способов вычислений, решения задач, выбор удобного способа;

– накопление и использование опыта решения разнообразных математических задач;

– пошаговый контроль правильности и полноты выполнения алгоритма арифметического действия, плана решения текстовой задачи, построения геометрической фигуры;

– поиск, обнаружение и устранение ошибок логического (в ходе решения) и арифметического (в вычислениях) характера;

– сбор, обобщение, и представление данных, полученных в ходе самостоятельно проведенных опросов;

– поиск необходимой информации в учебной и справочной литературе.

Предполагается, что освоение перечисленных видов деятельности обеспечит готовность обучающихся к дальнейшему образованию, необходимый уровень их математического развития, а именно:

– осознание возможностей и роли математики в познании окружающего мира, понимание математики как части общечеловеческой культуры;

– способность проводить исследование предмета, явления, факта с точки зрения его математической сущности (числовые характеристики объекта, форма размеры, продолжительность, соотношение частей и пр.);

– применение анализа, сравнения, обобщения, классификации для упорядочения, установления закономерностей на основе математических фактов, создания и применения моделей, для решения задач, формулирования правил, составления алгоритма действия;

– моделирование различных ситуаций, воспроизводящих смысл арифметических действий, математических отношений и зависимостей, характеризующих реальные процессы (движение, работа и т.д.);

– выполнение измерений в учебных и житейских ситуациях, установление изменений, происходящих с математическими объектами;

– прогнозирование результата математической деятельности, контроль и оценка действий с математическими объектами, обнаружение и исправление ошибок;

– осуществление поиска необходимой математической информации, целесообразное ее использование и обобщение.

Программа предлагает три варианта тематического планирования. Структура тематического планирования включает в себя перечень содержания курса, материалы тематического планирования и характеристику видов деятельности учащихся по каждому разделу программы.

Анализ содержания программы по математике на данной ступени обучения показывает, что центральное место в математическом образовании занимают разделы, связанные с арифметической составляющей данного курса. Здесь у учащихся формируется представление о натуральных числах, способах их записи и сравнения, вырабатываются вычислительные навыки, накапливается опыт решения текстовых задач арифметическим методом. Значительное влияние на развитие интуиции и логического мышления оказывают формируемые при этом виды деятельности.

Не менее важную роль в курсе математики начальной школы играет пропедевтика понятий функции и основных геометрических понятий, а также задач на перебор возможных вариантов, что будет служить началом проведения стохастической линии в школьном математическом образовании. Уже здесь на начальном этапе обучения математики мы можем увидеть материалы, направленные на пропедевтику изучения некоторых основных математических структур: алгебраической, вероятностной, теоретико-множественной.

Содержание и структура примерной программы по математике отражает направленность программы на достижение следующих целей.

Математическое развитие младшего школьника: использование математических представлений для описания окружающих предметов, процессов, явлений в количественном и пространственном отношении; формирование способности к продолжительной умственной деятельности, основ логического мышления, пространственного воображения, математической речи и аргументации, способности различать обоснованные и необоснованные суждения.

Освоение начальных математических знаний. Формирование умения решать учебные и практические задачи средствами математики. Вести поиск информации (фактов, сходства, различий, закономерностей, оснований для упорядочивания, вариантов); понимать значения величин и способов их измерения; использовать арифметические способы для разрешения сюжетных ситуаций; работать с алгоритмами выполнения арифметических действий, решения задач, проведения простейших построений. Проявлять математическую готовность к продолжению образования.

Воспитание критичности мышления, интереса к умственному труду, стремления использовать математические знания в повседневной жизни.

Программа формирования универсальных учебных действий конкретизирует общекультурную составляющую программы и направлена на обеспечение системно-деятельностного подхода, положенного в основу стандарта. Она призвана способствовать реализации развивающего потенциала общего начального образования, развитию системы универсальных учебных действий, выступающей как инвариантная основа образовательного процесса и обеспечивающей школьникам умение учиться, способность к саморазвитию и самосовершенствованию. Всё это достигается путём освоения обучающимися конкретных предметных знаний и навыков в рамках отдельных дисциплин и сознательного, активного присвоения ими нового социального опыта.

3. Универсальные учебные действия, входящие в состав начального математического образования

Перечислим виды универсальных учебных действий, формирование которых предусматривается в начальной школе в контексте каждого учебного предмета, в том числе и во всех ниже перечисленных вариативных программах по математике.

В составе основных видов универсальных учебных действий, соответствующих ключевым целям общего начального образования, выделяется четыре блока:

1) личностный;

2) регулятивный (включающий также действия саморегуляции);

3) познавательный;

4) коммуникативный.

Личностные действия обеспечивают ценностно-смысловую ориентацию учащихся (знание моральных норм, умение соотносить поступки и события с принятыми этическими принципами, умение выделить нравственный аспект поведения) и ориентацию в социальных ролях и межличностных отношениях. Применительно к учебной деятельности выделяется три вида личностных действий:

– личностное, профессиональное, жизненное самоопределение;

– смыслообразование, т. е. установление учащимися связи между целью учебной деятельности и ее мотивом, другими словами, между результатом учения и тем, что побуждает деятельность, ради чего она осуществляется; ученик должен задаваться вопросом: какое значение и какой смысл имеет для меня учение? - и уметь на него отвечать;

– нравственно - этическая ориентация, в том числе и оценивание усваиваемого содержания (исходя из социальных и личностных ценностей), обеспечивающее личностный моральный выбор.

Регулятивные действия обеспечивают учащимся организацию их учебной деятельности. К ним относят:

– целеполагание как постановка учебной задачи на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено учащимся, и того, что еще неизвестно;

– планирование - определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного результата; составление плана и последовательности действий;

– прогнозирование - предвосхищение результата и уровня усвоения знаний, его временных характеристик;

– контроль в форме сличения способа действия и его результата с заданным эталоном с целью обнаружения отклонений и отличий от эталона;

– коррекция - внесение необходимых дополнений и корректив в план и способ действия в случае расхождения эталона, реального действия и его результата;

– оценка - выделение и осознание учащимся того, что уже усвоено и что еще нужно усвоить; осознание качества и уровня усвоения;

– саморегуляция как способность к мобилизации сил и энергии, к волевому усилию (к выбору в ситуации мотивационного конфликта) и к преодолению препятствий.

Познавательные универсальные действия включают: общеучебные, логические, а также постановку и решение проблемы.

Общеучебные универсальные действия:

– самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели;

– поиск и выделение необходимой информации; применение методов информационного поиска, в том числе с помощью компьютерных средств;

– структурирование знаний;

– осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной и письменной форме;

– выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий;

– рефлексия способов и условий действия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности;

– смысловое чтение как осмысление цели чтения и выбор вида чтения в зависимости от цели; извлечение необходимой информации из прослушанных текстов различных жанров; определение основной и второстепенной информации; свободная ориентация и восприятие текстов художественного, научного, публицистического и официально-делового стилей; понимание и адекватная оценка языка средств массовой информации;

– постановка и формулирование проблемы, самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера.

Особую группу общеучебных универсальных действий составляют знаково-символические действия:

– моделирование, т. е. преобразование объекта из чувственной формы в модель, где выделены существенные характеристики объекта (пространственно-графические или знаково-символические);

– преобразование модели с целью выявления общих законов, определяющих данную предметную область.

Логические универсальные действия:

– анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных);

– синтез - составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание с восполнением недостающих компонентов;

– выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов;

– подведение под понятие, выведение следствий;

– установление причинно-следственных связей;

– построение логической цепи рассуждений;

– доказательство;

– выдвижение гипотез и их обоснование.

Постановка и решение проблемы:

– формулирование проблемы;

– самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера.

Коммуникативные действия обеспечивают социальную компетентность и учет позиции других людей, партнеров по общению или деятельности; умение слушать и вступать в диалог; участвовать в коллективном обсуждении проблем; интегрироваться в группу сверстников и строить продуктивное взаимодействие и сотрудничество со сверстниками и взрослыми. К коммуникативным действиям относятся:

– планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками - определение цели, функций участников, способов взаимодействия;

– постановка вопросов - инициативное сотрудничество в поиске и сборе информации;

– разрешение конфликтов – выявление, идентификация проблемы, поиск и оценка альтернативных способов разрешения конфликта, принятие решения и его реализация;

– управление поведением партнера - контроль, коррекция, оценка его действий;

– умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации; владение монологической и диалогической формами речи в соответствии с грамматическими и синтаксическими нормами родного языка.

Развитие системы универсальных учебных действий в составе личностных, регулятивных, познавательных и коммуникативных действий осуществляется в рамках нормативно-возрастного развития личностной и познавательной сферы ребенка. Процесс обучения задает содержание и характеристики учебной деятельности ребенка и тем самым определяет зону ближайшего развития указанных универсальных учебных действий и их свойства [39].

Таким образом, особенностью содержания современного начального образования является не только ответ на вопрос, что ученик должен знать (запомнить, воспроизвести), но и формирование универсальных учебных действий, обеспечивающих способность к организации самостоятельной учебной деятельности. Наряду со знаниевым компонентом (функциональной грамотностью младшего школьника), в программном содержании обучения представлен деятельностный компонент, что позволяет соблюсти баланс теоретической и практической составляющих содержания образования.

Примерная федеральная программа начального общего образования по математике [62] является основным ядром для разработки программ в вариативных системах обучения. В существующих авторских программах расширяется содержательный компонент программы, предлагается собственный подход к структурированию учебного материала, определению последовательности его изучения, выбору путей формирования универсальных учебных действий, которые выстраиваются с учетом концептуальных положений каждой из альтернативных программ. Ниже предлагается краткий обзор программ по математике в некоторых образовательных системах.

В системе В.В. Давыдова – Д.Б. Эльконина имеется несколько вариантов программ (В.В. Давыдова, Э.И. Александровой и др.)

Учебные программы в системе В.В. Давыдова - Д.Б. Эльконина построены на основе теории учебной деятельности. Своеобразие программ состоит в том, что они опираются на процесс активно-исследовательского усвоения знаний и умений, а не репродукцию готовых знаний, на творческое овладение генетическими истоками происхождения понятий. При этом в деятельности учащихся обязательно должны присутствовать мотив, система деятельности и контроль. Целью обучения математике в данных программах является формирование у младших школьников математических понятий на основе содержательного обобщения. Такой подход к построению программ предполагает выделение и исследование детьми условий происхождения генетических исходных отношений, определяющих данную систему понятий (В.В. Давыдов [27]). Основным содержанием программ является понятие рационального числа, изучение которого начинается с анализа генетически исходного отношения для всех видов отношений. Таким отношением, порождающим рациональное число, является отношение величин.

Овладение понятием начинается не с определения понятия, а с решения учебно-практической задачи с опорой на ранее приобретенные умения.

Логика развертывания учебного материала построена таким образом, что решение одной задачи влечет за собой решение другой.

Обучаясь по данным программам, дети знакомятся с многозначными числами и арифметическими действиями над ними; изучают позиционные системы счисления; рассматривают десятичные дроби как частный случай позиционных систематических дробей и выполняют действия над десятичными дробями; работают с процентами, записывают их в виде десятичных дробей; составляют и решают задачи арифметическим и алгебраическим методами; решают различные виды уравнений; работают с величинами; изучают геометрические фигуры и тела.

В курсе отсутствуют концентры, характерные для традиционных программ начального обучения математике.

Особое место в курсе отведено текстовым задачам. Основная цель их изучения - формирование рациональных способов анализа текстов и моделирования с помощью специальных знаково-символических средств.

В системе Л.В. Занкова [32] автором программы по математике является И.И. Аргинская.

Основным содержанием программы является понятие натурального числа и арифметические действия с натуральными числами. Расширение понятия числа происходит за счет знакомства с дробными, а также положительными и отрицательными числами. Для расширения и углубления представлений учащихся об арифметических действиях рассматриваются случаи выполнения операций с геометрическими фигурами: геометрическое сложение и вычитание отрезков и углов, умножение их на натуральное число, деление на равные части. В 4 классе учащиеся знакомятся с еще одним действием – возведение в степень. Данное действие связывается с изучением таких величин как площадь и объем. В ходе изучения данного материала дети должны научиться возводить в степень, знать понятия «основание степени» и «показатель степени». Значительное место в программе занимает геометрический материал.

В соответствии с программой в начальный курс математики включены не только основные вопросы базового содержания, но и вопросы, расширяющие базовые понятия математики. Основной путь познания курса математики – индуктивный. Для этой программы характерно расширение и углубление содержания учебного материала; включение в начальный курс математики вопросов, обычно рассматриваемых на более поздних этапах обучения; включение элементов из истории математики, направленных на развитие познавательного интереса к предмету.

Основу курса математики в образовательной системе «Школа России» [61] составляют представления о целых неотрицательных числах (в пределах миллиона) и четыре арифметических действия с ними, а также прочное осознанное усвоение приемов устных и письменных вычислений.

Важное место в программе занимает ознакомление с такими величинами, как: длина, масса, объем (вместимость), время, площадь и способами их измерения. На протяжении всего обучения в начальной школе дети решают простые и составные сюжетные задачи. Наряду с решением готовых задач предусмотрены задания на самостоятельное составление задач, на преобразование решенной задачи и т.п. В процессе обучения учащиеся знакомятся с геометрическими фигурами. В программу включаются элементы алгебраической пропедевтики.

В данной программе полностью реализуется обязательная часть содержания образования, обозначенная в примерной программе начального образования по математике (стандарт второго поколения).

В основе программы по математике для начальной школы Н.Б. Истоминой [36] лежит то же содержание, что и в программе «Школа России». Отличие состоит в методах и последовательности изучения тем.

Программа Н.Б. Истоминой является наименее загруженной дополнительным материалом и в целом наиболее близка к проекту нормативного документа. В программе Н.Б. Истоминой основная роль «двигателя развития» ребенка в процессе обучения математике отводится построению методической системы, направленной на формирование приемов умственной деятельности в процессе усвоения математического содержания. Реализация данной цели обеспечивается следующими положениями.

1. Тематическим построением курса, создающим условия для осознания школьниками связей между новыми и ранее изученными понятиями, для осуществления продуктивного повторения, для активного использования в процессе обучения приемов умственной деятельности.

2. Новым подходом к изучению математических понятий, свойств и способов действия, в основе которого лежит установление соответствия между предметными, словесными, графическими (схематическими) и символическими моделями, их выбор, преобразование и конструирование, в соответствии с заданными условиями.

3. Своеобразным подходом к формированию вычислительных навыков и умений, который создает условия не только для повышения качества вычислительной деятельности младших школьников, но и для развития мышления.

4. Формированием общего приема решения задач при обучении младших школьников решению текстовых задач. В соответствии с этим методическим приемом дети знакомятся с текстовой задачей только после того, как у них сформированы знания, умения и навыки, необходимые для овладения умением решать текстовые задачи. К ним относятся навыки чтения, усвоение конкретного смысла действий сложения и вычитания, приобретение опыта в соотнесении предметных, словесных,

схематических и символических моделей, знакомство со схемой как способом моделирования.

5. Преимущественно диалоговая форма обучения. Диалоги помогают учителю не только привлечь учащихся к обсуждению того или иного вопроса, но и самому включиться в эту работу, заняв тем самым не контролирующую позицию, а помогающего детям и сотрудничающего с ними.

Программа по математике в образовательной системе «Начальная школа XXI век» автор В.Н. Рудницкая [63] обогащена сведениями из других разделов математики, включая элементы логики, теории графов с целью установления перспективы математического образования в основной школе и для реализации деятельностного подхода, заключающегося в предъявлении учебного материала дискуссионного характера.

В процессе обучения математике по данной программе школьники знакомятся с числами в пределах миллиона и выполняют с ними арифметические действия. С первого класса включено ознакомления учащихся с калькулятором. Программой предполагается расширение представлений школьников об измерении величин: вводится понятие о точном и приближенном значениях величин. Учащиеся изучают важные логико-математические понятия: высказывание, логические связки «и», «или», «если …, то …», «неверно, что …». Знакомятся со смыслом логических слов «каждый», «любой», «все», «кроме того», «какой-либо». Геометрическая часть содержания включает не только плоские фигуры, но и пространственные. При этом рассматривается взаимное расположение фигур на плоскости. Так же в программу включено понятие об осевой симметрии. Большое внимание в программе уделяется формированию у учащихся понятия переменной.

Сопоставительный анализ программ по системам Л.В. Занкова и В.В. Давыдова – Д.Б. Эльконина (авторы программ И.И. Аргинская и Э.И. Александрова) показывает, что они содержат значительно больший объем материала, чем это предусмотрено стандартом. Значимым отличием является работа с объемными телами и инструментами для построения фигур на плоскости, содержат значительный по объему материал для работы с дробями, в том числе с процентами.

Программы Л.Г. Петерсон [107] и В.Н. Рудницкой [63] отличаются наибольшим уровнем насыщения курса математики начальной школы алгебраическим материалом и дробями (в том числе процентами). Программа В.Н. Рудницкой знакомит учеников начальных элементами формальной логики.

В программах В.Н. Рудницкой [63] и Э.И. Александровой [4] «вес» развивающего потенциала связан с усложнением арифметической (системы счисления и дроби), алгебраической (уравнения) и формально-логической (элементы теории множеств и логики) линий содержательного наполнения программ. Это обусловлено значимым влиянием на эти системы взглядов В.В. Давыдова на ведущую роль теоретического мышления в развитии ребенка младшего школьного возраста.

Закон «Об образовании в РФ» разрешает учителю осуществлять выбор программы из числа рекомендованных или допущенных Министерством образования и науки РФ, по которой он будет осуществлять обучение школьников математике в начальных классах. В то же время, учитель может адаптировать к условиям класса один из вариантов примерной ООП по математике, либо на ее основе разработать свой вариант программы по данной дисциплине.

Вопросы для самопроверки

1. Какие составляющие можно выделить в содержании математического образования в начальных классах?

2. Перечислите разделы математики, которые включены в содержание математического образования в начальных классах?

3. Какие цели обозначены в примерной программе математического образования?

4. Охарактеризуйте варианты тематического планирования о математике в начальной школе.

5. Как представлены планируемые результаты освоения программ начального образования по математике?

6. Какие виды внеурочной деятельности по математике предлагаются в рамках стандарта второго поколения?

7. Выделите общее и различное в различных вариантах примерной программы по математике.

8. Какие группы УУД входят в состав содержания математического образования в начальных классах?

Задания для самоподготовки

1. Составьте блок схему, отражающую структуру и основное содержание примерной программы по математике, составленной в соответствии с требованиями стандарта второго поколения.

2. Сравните варианты тематического планирования в примерной программе по математике. Чем вызвано наличие трех вариантов тематического планирования?

3. Установите факт и степень соответствия преемственности в математическом образовании ДОУ, начальной школе и 5-6 классах основной школы.

4. Приведите примеры заданий из учебника «Математика», направленных на формирование видов математической деятельности, указанных в примерной программе.

5. Назовите и охарактеризуйте основные типы ориентировочной основы действия и основные типы учения по

П.Я. Гальперину. Приведите пример организации обучения при использовании разных типов ООД.

1.3. Методы обучения математике в начальной школе

План лекции

1. Представление о методах обучения
2. Характеристика методов познания
3. Методы проблемно-диалогического обучения
4. Описание методов, используемых на разных этапах изучения нового материала

1. Представление о методах обучения

Вопрос о методах – это вопрос о том, как учить, чтобы добиться хороших результатов в обучении. В теории познания метод определяется как система последовательных действий, которые приводят к достижению результата, соответствующего намеченной цели. Методы обучения – это способы взаимодействия учителя и учащихся, направленного на достижение целей образования, воспитания и развития школьников ходе обучения.

В педагогике рассматриваются различные методы, которые используются в начальных классах при обучении любому предмету. Мы не будем повторять характеристику методов обучения, которые описаны в педагогике. Остановимся на описании тех методов, которые позволяют формировать у детей учебную самостоятельность, а также методов, позволяющих реализовать проблемно-диалогическое обучение, характерное для современного обучения. Заметим, что отбор методов обучения определяется многими факторами: общими задачами обучения, содержанием изучаемого материала, уровнем подготовленности детей к овладению соответствующим материалом, возрастными особенностями учащихся и др.

2. Характеристика методов познания

Одной из важных задач обучения является формирование у школьников познавательной самостоятельности, а значит, актуальными становятся методы познания, позволяющие, с одной стороны, осуществлять обучение школьников, включая их в процесс исследования, приобщая к исследовательской деятельности, с другой, вооружать их методами, необходимыми для самостоятельного познания.

Одним из наиболее универсальных математических методов познания является метод математических моделей (математическое моделирование).

Математическая модель – это описание какого-либо класса явлений реального мира на языке математики. Метод моделирования дает возможность применять математический аппарат к решению практических задач. Понятия числа, геометрической фигуры, уравнения, неравенства, являются примерами математических моделей.

Современные технологии широко используют метод моделирования в курсе математики начальных классов. К методу математического моделирования в учебном процессе обращаются при решении любой задачи с практическим содержанием. Чтобы решить такую задачу математическими средствами, ее поэтапно переводят на язык математики, переходя от словесной модели к графической, а затем и к символической. Последняя модель и является математической моделью ситуации описанной в задаче. В процессе математического моделирования широко используются кодирование ситуации и декодирование построенной модели, абстракции, обобщения.

Кроме метода моделирования к методам познания относят такие методы как наблюдение, описание, измерение и эксперимент. История развития математики свидетельствует о том, что эмпирические методы сыграли неоценимую роль в зарождении математических знаний, становлении математики как самостоятельной теоретической дисциплины. Школьное обучение математике особенно в начальных классах в определенной мере повторяет ее исторический путь развития.

Исходя из задач, стоящих перед современной школой, где обучение направлено не только сообщению готовых знаний, но и на формирование у детей методов познания, обеспечивающих становление учебной самостоятельности, применение в обучении эмпирических методов познания становится особенно актуальным.

Наблюдение, опыт и измерения должны быть направлены на создание в процессе обучения математике специальных ситуаций и предоставление учащимся возможности извлечь из них очевидные закономерности, геометрические факты, идеи для простейших доказательств. Чаще всего результаты наблюдения, опыта и измерений служат посылками индуктивных выводов, с помощью которых осуществляются открытия новых истин. Поэтому наблюдение, опыт и измерения относят и к эвристическим методам обучения, т. е. к методам, способствующим открытиям.

Проиллюстрируем такое применение наблюдения, опыта и измерений несколькими примерами.

Рассматривая различные фигуры, в том числе окружающие нас предметы, можно установить, что среди них есть фигуры, которые обладают осевой симметрией. Наблюдение этих фигур позволяет заметить, что каждая из «симметричных» фигур делится некоторой прямой на две части так, что, если согнуть фигуру по этой прямой, одна ее часть полностью накладывается на другую. Для каждой из «несимметричных» фигур такой прямой найти нельзя.

После наблюдения «симметричных» фигур в окружающем пространстве (архитектурных украшений, строительных и других деталей, некоторых листьев на деревьях и т. д.) можно перейти к дальнейшему изучению осевой симметрии с помощью специального опыта (эксперимента).

Каждому ученику предлагается согнуть лист бумаги так, чтобы одна часть листа упала на другую и образовалась линия сгиба. Затем предлагается выпрямить снова лист и отметить на нем произвольную точку А, не лежащую на линии сгиба, затем снова согнуть лист по той же линии сгиба и определить, глядя на свет через согнутый лист, с какой точкой совпала при этом точка А. Пусть это точка A_1. Учащимся сообщают, что точки А и A_1 называются симметричными относительно прямой *l* (линии сгиба), называемой осью симметрии этих точек. Для другой точки В, лежащей по другую сторону от линии сгиба, чем точка А, предлагается определить (опытным путем, с помощью сгибания листа) симметричную ей точку относительно той же оси *l*. Замечаем, что, если взять точку С на линии сгиба, она остается неподвижной при сгибании листа, т. е. не совпадает с какой-либо другой точкой листа. Мы говорим, что любая точка оси симметрии (линии сгиба) симметрична самой себе.

Рассмотрим пример применения опыта для открытия переместительного свойства сложения. Допустим, что в одной коробке имеется *m* синих палочек, а в другой *n* красных палочек. Нужно освободить одну коробку. Мы можем это сделать двумя способами. Можно пересыпать все красные палочки в коробку, где синие палочки, и тогда в ней окажется $(m + n)$ палочек. Но можно пересыпать все синие палочки в коробку, где красные палочки, и тогда в ней окажется $(n + m)$ палочек. Но и в одном, и в другом случае мы имеем в коробке одно и то же множество палочек. Следовательно, $m + n = n + m$.

Разумеется, в конкретном опыте m и n обозначают определенные числа. Поэтому полученное равенство является лишь одной из посылок, с помощью которых уже другим методом (индукцией) получают общий закон коммутативности сложения натуральных чисел: «$m + n = n + m$ для любых натуральных чисел m и n».

Подсчет двумя способами (по рядам и по столбцам) единичные квадратиков, заполняющих прямоугольник, измерения которого выражаются натуральными числами, является опытом, с помощью которого обнаруживается коммутативность умножения натуральных чисел.

Важно отметить, что с помощью эмпирических методов (наблюдения, опыта, измерений) выполняется лишь начальный этап работы по математическому описанию реальных ситуаций. Получаемый математический материал (интуитивные понятия, гипотезы, совокупности математических предложений) подлежит дальнейшей обработке уже другими методами

Сравнение и аналогия – логические приемы мышления, используемые как в научных исследованиях, так и в обучении в качестве метода.

С помощью сравнения выявляется сходство и различие сравниваемых предметов, т. е. наличие у них общих и различных свойств.

Например, сравнение треугольника и четырехугольника раскрывает их общие свойства: наличие сторон, вершин, углов, столько же вершин и углов, сколько сторон. Устанавливается и различие: у треугольника три вершины (стороны), у четырехугольника – четыре.

Сравнение приводит к правильному выводу, если выполняются следующие условия:

1) сравниваемые понятия однородны;

2) сравнение осуществляется по таким признакам, которые имеют существенное значение.

Рассуждение по аналогии имеет следующую общую схему:

А обладает свойствами *a, b, c, d*.

В обладает свойствами *a, b, c*.

Вероятно (возможно) В обладает и свойством *d*.

Заключение по аналогии является лишь вероятным (правдоподобным), а не достоверным. Поэтому аналогия, как правило, не является доказательным рассуждением, т. е. рассуждением, которое может служить доказательством. Однако в обучении, как, впрочем, и в науке, аналогия часто полезна тем, что она наводит нас на догадки, т. е. служит эвристическим методом. В обучении же математике не менее важно, чем учить доказывать, это учить догадываться, что именно подлежит доказательству и как найти это доказательство.

Часто та или иная последовательность в изучении учебного материала обосновывается возможностью использования аналогии в обучении. Например, изучение вычислительных приемов в курсе математики начальных классов опирается на сходство приемов вычислений.

В практике обучения математике аналогия все еще используется недостаточно. Иногда высказываются опасения, что с помощью аналогии мы можем прийти к ложным заключениям.

Однако не следует опасаться возникновения ложных заключений по аналогии. Необходимо лишь считать их гипотезами (предположениями). Ошибки, допускаемые в процессе поиска, исследования, вполне правомерны, так как чаще всего поиск ведется способом «проб и ошибок». Нередко учитель не дает учащимся, отвечающим на вопросы учителя, ошибаться. В этом отражается тот факт, что учебная деятельность учащихся в этом случае является лишь репродуктивной деятельностью, а в такой деятельности ошибки недопустимы. Воспроизводить следует безошибочно.

В продуктивной же, творческой деятельности ошибки неизбежны. Такого рода ошибками являются и те, которые появляются в результате применения аналогии в процессе поиска. Они являются составной частью метода проб и ошибок. Важно, чтобы учащиеся в поиске правильных ответов сами могли находить ошибочность возникающих в этом процессе предположений. Этому, разумеется, надо их учить. Именно на этой особенности аналогии строится проблемно-диалогические методы обучения, используемые в развивающих технологиях обучения и необходимых для реализации идей заложенных в образовательном стандарте второго поколения.

Обобщение и абстрагирование – два логических приема, применяемые почти всегда совместно в процессе познания.

Обобщение – это мысленное выделение, фиксирование каких-либо общих существенных свойств, принадлежащих только данному классу предметов или отношений.

Абстрагирование – это мысленное отвлечение, отделение общих, существенных свойств, выделенных в результате обобщения, от прочих несущественных или различных свойств рассматриваемых предметов или отношений и отбрасывание (в рамках нашего изучения) последних.

Когда мы говорим «несущественные свойства», то имеем в виду несущественные с математической точки зрения. Один и тот же предмет может изучаться, например, физикой или математикой. Для физики существенны одни его свойства, для математики другие. Математика изучает лишь форму, размеры, расположение предмета.

Из приведенного краткого разъяснения вытекает, что абстрагирование не может осуществляться без обобщения, без выделения того общего, существенного, что подлежит абстрагированию.

Обобщение и абстрагирование неизменно применяются в процессе формирования понятий, при переходе от представлений к понятиям. В этом случае их рассматривают как эвристические методы.

Под обобщением понимают переход от единичного к общему, от менее общего к более общему, а под конкретизацией понимают обратный переход – от более общего к менее общему, от общего к единичному.

Если обобщение используется при формировании понятий, то конкретизация используется при описании конкретных ситуаций с помощью сформированных ранее понятий.

Рассмотрим переход от единичного к общему, Например, формирование понятия «квадрат» на раннем этапе обучения начинается с показа множества предметов, отличающихся друг от друга формой, размерами, цветом, материалом, из которого они сделаны. Дети, после того как им показывают на одну из этих фигур и говорят, что это квадрат, безошибочно отбирают из множества фигур все те, которые имеют такую же форму, пренебрегая различиями, в размерах, цвете, материале. Здесь выделение из множества предметов подмножества производится по одному еще недостаточно проанализированному признаку – по форме. Дети еще не знают свойств квадрата, они распознают его только по форме. Такое распознавание встречается у детей 4-5 лет. Дальнейшая работа по формированию понятия квадрат состоит в анализе этой формы с целью выявления ее свойств. Учащимся предлагается путем наблюдения найти, что есть общего у всех отобранных фигур, имеющих форму квадрата, чем они отличаются от остальных. Устанавливается, что у всех квадратов 4 вершины и 4 стороны. Но у некоторых фигур, которые мы не отнесли к квадратам, тоже 4 вершины и 4 стороны. Оказывается, у квадрата все стороны равны и все углы прямые.

3. Методы проблемно – диалогического обучения

В развивающих системах обучения широко используется технология проблемно-диалогического обучения [54], которая позволяет учащимся самостоятельно «открывать» знания

В данной технологии различают две больших группы методов.

1. Методы постановки учебной проблемы.
2. Методы поиска решения учебной проблемы.

В первую группу методов автор включает три основных метода постановки учебной проблемы:

– побуждающий от проблемной ситуации диалог;
– подводящий к теме диалог;
– сообщение темы с мотивирующим приёмом.

Побуждающий от проблемной ситуации диалог наиболее сложен для учителя, поскольку требует последовательного осуществления четырёх педагогических действий:

1) создание проблемной ситуации;
2) побуждения к осознанию противоречия проблемной ситуации;
3) побуждения к формулированию учебной проблемы;
4) принятия предлагаемых учениками формулировок учебной проблемы.

Подводящий к теме диалог проще, чем предыдущий, т.к. не требует создания проблемной ситуации. Он представляет собой систему (логическую цепочку) посильных ученику вопросов и заданий, которые пошагово приводят класс к формулированию темы урока. В структуру подводящего диалога могут входить разные типы вопросов и заданий: репродуктивные (вспомнить, выполнить по образцу); мыслительные (на анализ, сравнение, обобщение). Но все звенья подведения опираются на уже пройденный классом материал, а последний обобщающий вопрос позволяет ученикам сформулировать тему урока.

Третий метод – сообщение темы с мотивирующим приемом – наиболее простой из группы методов постановки учебной проблемы. Он заключается в том, что учитель сам сообщает тему урока, но вызывает к ней интерес детей применением одного из двух мотивирующих приемов.

1. «Яркое пятно» (сообщение классу интригующего материала, захватывающего внимание учеников, но при этом связанного с темой урока).

2. «Актуальность» (обнаружение смысла, значимости предлагаемой темы для каждого ученика).

Используя методы поиска решения учебной проблемы, учитель помогает ученикам «открыть» новое знание. На уроке существуют три основные возможности обеспечить такое «открытие».

– Побуждающий к гипотезам диалог.
– Подводящий к знаниям от проблемы диалог.
– Подводящий к знаниям без проблемы диалог.

Наиболее трудным для учителя является первый из названных методов, поскольку он требует осуществления четырёх педагогических действий.

– Побуждения к выдвижению гипотез.
– Принятия выдвигаемых учениками гипотез.
– Побуждения к проверке гипотез.
– Принятия предлагаемых учениками проверок.

Другой метод из группы методов поиска решения учебной проблемы – проще предыдущего, поскольку не требует выдвижения и проверки гипотез. Подводящий диалог (от проблемы или без проблемы) представляет собой логическую цепочку посильных ученику вопросов и заданий, которые пошагово приводят класс к формулированию нового знания.

Оформим описанные выше методы в виде таблицы.

Таблица 1

Методы постановки учебной проблемы			Методы поиска решения учебной проблемы		
Побуждающий от проблемной ситуации диалог	Подводящий к теме диалог	Сообщение темы с мотивирующим приемом	Побуждающий к гипотезам диалог	Подводящий к знаниям от проблемы диалог	Подводящий к знаниям без проблемы диалог

Особенности использования на уроке тех или иных методов обучения можно найти в книге «Выбор методов обучения», созданной под редакцией Ю.К. Бабанского [21].

4. Описание методов, используемых на разных этапах изучения нового материала

Работа над программным материалом включает в себя несколько этапов: подготовку к изучению нового материала, ознакомление с новым материалом и закрепление полученных знаний.

Кратко рассмотрим использование методов на каждом этапе изучения темы [71].

Подготовительная работа обеспечивает необходимые условия для успешного усвоения материала всеми учащимися класса. На этой ступени можно использовать как метод беседы, так и метод самостоятельной работы с последующим обобщением.

При ознакомлении с новым материалом типа сведений (правила порядка выполнения арифметических действий в выражениях, ознакомление с терминами, с некоторыми приемами вычислений), во время инструктажа учеников по использованию инструментов (линейки, циркуля и т.п.) и в других подобных случаях используется метод объяснения.

Изложение материала должно быть четким, доступным, непродолжительным по времени. При этом по мере необходимости используются наглядные пособия – наглядный метод.

При ознакомлении учащихся с математическими понятиями (число, арифметическое действие и др.), с теоретическими знаниями типа закономерностей (свойства арифметических действий, связи между компонентами и результатами действий и т.п.) чаще всего используется метод беседы. Система упражнений в этом случае должна вести детей от частных фактов к общему выводу, к «открытию» той или иной закономерности, т. е. здесь целесообразна эвристическая беседа, обеспечивающая индуктивный путь рассуждения.

При ознакомлении с новым материалом индуктивным путем учитель, проводя беседу, предлагает учащимся ряд упражнений. Учащиеся выполняют их, затем, анализируя, выделяют существенные стороны формируемого знания, в результате чего делают соответствующий вывод, т.е. приходят к обобщению.

К системе упражнений предъявляется ряд требований.

1. Система упражнений должна обеспечивать наглядную основу формируемого знания.

2. Упражнения надо подбирать так, чтобы, анализируя их, учащиеся смогли бы выделить все существенные стороны формируемого знания. Для этого подбираются упражнения так, чтобы сохранялись существенные стороны, а несущественные изменялись.

3. В начальном курсе математики есть сходные вопросы (например, переместительное свойство сложения и умножения) и есть противоположные (например, сложение и вычитание). При ознакомлении с новым материалом, который сходен с уже изученным, надо так подбирать упражнения, чтобы раскрывать новый материал в сопоставлении со сходным, т.е. сравнивать новый материал, выделяя существенное общее. Раскрывая противоположные понятия, надо подбирать упражнения так, чтобы можно было использовать прием противопоставления, т.е. выделять существенное различное. Приемы сопоставления и противопоставления помогают правильному обобщению формируемого знания, предупреждают их смешение.

При ознакомлении с вопросами практического характера, которые вводятся на основе теоретических знаний (ознакомление с многими вычислительными приемами, с решением уравнений и т.п.), также используется эвристическая беседа, но обеспечивающая дедуктивный путь рассуждения: от общего положения к частному.

В начальном обучении наиболее эффективен индуктивно-дедуктивный метод, когда от рассмотрения частных случаев (задач, выражений) осуществляется переход к общим выводам и правилам, а затем на основании общих положений осмысливаются другие частные факты. Например, индуктивным путем формируется понятие о виде задачи: ученики решают ряд задач данного вида, выделяя в них существенное, типичное. Затем, встречая задачу, ученик при анализе ее содержания находит в ней те существенные признаки, которые характерны для задач этого вида, относит ее к данному виду и находит правильный способ ее решения.

В начальных классах иногда при ознакомлении с новым материалом используется метод самостоятельных работ: учащиеся самостоятельно выполняют упражнения и приходят к выводу, т.е. в приобретении знаний они используют исследовательский (проблемный) метод.

При закреплении полученных знаний широко используется метод самостоятельных работ. При этом полезно предлагать упражнения дифференцированно, учитывая возможности каждого из детей.

В начальном курсе математики также используется лабораторный (практический) метод. Данный метод преимущественно используется при ознакомлении учеников с величинами: длиной, массой, емкостью, временем, площадью, объемом и др., с их свойствами и способами измерения.

Основными методами, которые позволяют учащимся проявить творческую активность в процессе обучения математике, являются эвристические методы. Схема применения этих методов состоит в том, что учитель ставит перед классом некоторую учебную проблему, а затем путем последовательно предлагаемых заданий или вопросов «наводит» учащихся на самостоятельное обнаружение того или иного математического факта. Учащиеся постепенно, шаг за шагом, преодолевают трудности в решении поставленной проблемы и «открывают» сами ее решение.

Известно, что в процессе изучения математики школьники часто сталкиваются с различными трудностями. Однако в обучении, построенном эвристически, эти трудности часто становятся своеобразным стимулом для изучения. Так, например, если у школьников обнаруживается недостаточный запас знаний для решения какой-либо задачи или доказательства некоторого факта, то они сами стремятся восполнить этот пробел, самостоятельно «открывая» то или иное свойство и тем самым сразу обнаруживая полезность его изучения. В этом случае роль учителя сводится к тому, чтобы организовать и направить работу ученика, чтобы трудности, которые ученик преодолевает, были ему по силам. Нередко эвристические методы выступают в практике обучения в форме эвристической беседы. Опыт многих учителей, широко применяющих эвристические методы, показал, что он влияет на отношение учащихся к учебной деятельности. Приобретя «вкус» к эвристике, учащиеся начинают расценивать работу по «готовым указаниям», как работу неинтересную и скучную. Наиболее значимыми моментами их учебной деятельности на уроке и в домашних условиях становятся самостоятельные «открытия», например, того или иного способа решения задачи. Явно возрастает интерес учащихся к тем видам работ, в которых находят применение эвристические методы и приемы.

Экспериментальные исследования, проведенные еще в советской школе, свидетельствуют о полезности широкого использования эвристических методов при изучении математики, начиная уже с начального школьного возраста. Естественно, что в таком случае перед учащимися можно поставить только те учебные проблемы, которые могут быть поняты и разрешены учащимися на данном этапе обучения.

К сожалению, на частое применение эвристического метода в процессе обучения поставленных учебных проблем требуется гораздо больше учебного времени, чем на изучение этого же вопроса методом сообщения учителем готового решения (доказательства, результата). Поэтому учитель не может использовать эвристический метод преподавания на каждом уроке. К тому же длительное использование только одного (даже весьма эффективного метода) противопоказано в обучении. Однако следует отметить, что время, затраченное на изучение базовых понятий, проработанных с личным участием учащихся, не потерянное время: новые знания приобретаются почти без затраты усилий благодаря ранее полученному глубокому мыслительному опыту.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется понятие «метод обучения» в педагогике?
2. Какие классификации методов обучения вы знаете из курса педагогики?
3. Охарактеризуйте методы познания, необходимые для формирования учебной самостоятельности школьников.
4. Раскройте особенности методов применяемых в технологии проблемно-диалогического обучения.
5. Охарактеризуйте методы обучения, определяемые уровнем познавательной деятельности учащихся
6. Охарактеризуйте методы, используемые на разных этапах изучения нового материала.
7. Дайте характеристику методу беседы.

Задания для самоподготовки

1. Выберите тему урока и сконструируйте фрагмент урока с использованием методов проблемно-диалогического обучения.
2. Выберите темы в курсе математики начальных классов, при рассмотрении которых можно обратиться к аналогии.
3. Проанализируйте методические пособия к учебнику «Математика» для начальных классов с точки зрения использования в них методов познания (учебник выбирается по усмотрению студента).
4. Приведите примеры использования методов познания при обучении математике.

1.4. Организационные формы обучения математике

План лекции

1. Урок как интегративная технология образовательного процесса
2. Структура урока «открытия» нового знания
3. Структура урока рефлексии
4. Уроки развивающего контроля
5. Особенности уроков систематизации и обобщения
6. Учебные задания и их функции
7. Анализ урока
8. Планирование урока
9. Виды форм организации познавательной деятельности учащихся на уроке

1. Урок как интегративная технология образовательного процесса

Основной формой организации учебного процесса является урок, то есть такая организация учебной работы, когда постоянная группа учеников под руководством учителя изучает математику в течение точно установленного времени по определенному расписанию в соответствии с учебной программой.

Урок, как основная организационная форма обучения, обеспечивает системное включение каждого обучающегося, независимо от его актуального уровня, в основные виды деятельности и тем самым формирует у него способность к этим видам деятельности, то есть обеспечивает готовность к саморазвитию.

В последние годы в связи с вариативностью образовательных систем особенно остро встала проблема согласования, как учебного содержания, так и технологии обучения. В связи с этим встала задача описать один из возможных подходов к построению и классификации уроков развивающего обучения.

Решение данной задачи нашло свое отражение в работах Л.Г. Петерсон [58]. Описанный ею подход реконструируется, совершенствуется и активно внедряется в современный учебный процесс. Рассмотрим основные положения этого подхода.

Под технологией организации процесса обучения и его частички – урока – понимают функционально связанную последовательность его этапов и систему требований к каждому из них.

В соответствии со структурой основных видов деятельности, обобщенная технология организации урока включает в себя следующие этапы.

Шаг 1. Самоопределение к деятельности или (организационный момент).

Предполагает осознанный переход школьников из жизнедеятельности в деятельность.

Шаг 2. Самостоятельная деятельность по известной норме N.

На этом этапе актуализированная в сознании учащихся известная норма деятельности N переводится в конкретное действие.

Шаг 3. Реконструкция деятельности по известной норме N.

Педагог, организуя этот этап деятельности, должен предусмотреть коммуникативное взаимодействие, результатом которого станет фиксирование в языке условий применимости известной нормы.

Шаг 4. Критика известной нормы N.

На этом этапе выявляется причина кризиса известной нормы N. Устанавливается отличительные особенности ситуации, вызвавшей затруднение.

Шаг 5. Построение нормы деятельности N.

Обсуждаются различные предложения, и выбирается один алгоритм, который фиксируется как новая норма деятельности N1.

Шаг 6. Использование нормы N1 для решения задания, вызвавшего затруднение.

На этом этапе обучаемый конкретизирует сформировавшийся образ N1 в деятельности по преодолению возникшего затруднения, проговаривая выполненный шаг во внешней речи.

Шаг 7. Фиксирование нормы N1 в языке.

Происходит оформление новой нормы N1, что создаёт понятийную основу для развития способностей к новому виду деятельности.

Шаг 8. Использование нормы N1 в типовых условиях.

Ученик самостоятельно выполняет типовые задания, требующие использования нормы N1, и самостоятельно проверяет правильность решения.

Шаг 9. Включение нормы N1 в систему понятий.

Выявляются границы применимости нового понятия и выполняются задания.

Шаг 10. Выполнение тренировочных действий по ранее изученным нормам (повторение).

Шаг 11. Этап рефлексивного анализа деятельности на уроке

Шаг 12. Фиксирование достижения цели.

На этом этапе соотносятся цель урока и результаты деятельности, фиксируется степень их соответствия.

Предложенная последовательность шагов включает все виды деятельности – самоопределение, нормореализацию и нормотворчество, сформированность которых в сознании выпускника обеспечит достижение деятельностных целей. Эту последовательность шагов ещё называют технологией развивающего обучения [65]. Предложенная технология организации процесса обучения позволяет комплексно реализовывать современные целевые требования к системе образования.

В данной технологии уроки развивающего типа распределяются в четыре группы:

- уроки «открытия» нового знания;
- уроки рефлексии;
- уроки общеметодологической направленности;
- уроки контроля.

2. Структура урока «открытия» нового знания

Уроки открытия нового знания включают в себя следующие этапы.

1. Организационный момент:

– создание положительного самоопределения ребенка к деятельности на уроке, т.е. включение школьника в познавательную деятельность, что предполагает возникновение у него желания работать (хочу) и уверенности в том, что у него все получиться (могу).

2. Актуализация знаний:

– актуализация ЗУН, достаточных для «открытия» нового знания (актуализация базовых знаний);

– фиксирование затруднения в индивидуальной деятельности. (Выполняя действие по известному правилу, ученик устанавливает, что правило не работает);

– исследование деятельности по известному правилу (Ученик еще раз проверяет, правильно ли он действовал по известному алгоритму);

– фиксирование невыполнимости деятельности по известному правилу (алгоритму).

3. Постановка проблемы.

Фиксирование в громкой речи.

– Где возникло затруднение?

– Почему оно возникло?

– Какова тема урока?

4. «Открытие» детьми нового знания:

– по возможности включение детей в ситуацию выбора метода решения проблемы;

– решение детьми проблемы с помощью выбранного метода;

– фиксирование нового алгоритма (понятия) в речи.

5. Первичное закрепление:

– решение детьми типовых заданий с применением нового способа;

– проговаривание способа решения в громкой речи.

6. Самостоятельная работа с самопроверкой в классе:

– самостоятельное решение детьми типовых заданий с применением нового способа;

– самостоятельная проверка детьми своей работы по заданному образцу;

– создание ситуации успеха.

7. Повторение:

– включение нового знания в систему знаний;

– решение задач на повторение и закрепление ранее изученного материала.

8. Итог занятия:

– рефлексия деятельности на уроке (что нового узнали, с помощью какого инструмента, правила, алгоритма);

– самооценка детьми собственной деятельности по усвоению нового материала.

3. Структура урока рефлексии

Развивающая цель этих уроков – формирование способности учащихся к фиксированию собственных затруднений в деятельности, выявлению их причин, построению и реализации проекта выхода из затруднений. Обучающая цель: коррекция и тренинг изученных понятий, алгоритмов [45].

На уроках рефлексии деятельность учащихся автор рекомендует организовывать по следующей структуре.

1. Во время организационного момента учитель устанавливает тематические рамки повторяемого содержания.

2. На этапе актуализации знаний организуется индивидуальная самостоятельная работа, которая заканчивается сопоставлением полученных результатов с образцами.

3. На этапе постановки проблемы учащиеся анализируют ситуацию и фиксируют допущенные ими ошибки.

4. На этапе устранения затруднений (этап аналогичный этапу открытия нового знания) организуется выявление причин зафиксированных затруднений и построение алгоритма выхода из затруднений. Результатом этого этапа должно быть указание алгоритма, в котором допущены ошибки, и места нарушения этого алгоритма. Ошибка должна быть исправлена в соответствии с правильным применением алгоритма.

5. На этапе проговаривания причин типичных ошибок в громкой речи (этап аналогичный этапу первичного закрепления) обсуждаются типичные затруднения, повторяются формулировки алгоритмов и объясняется механизм их использования.

6. На этапе самоконтроля с проверкой каждый учащийся выполняет только те задания из числа предложенных, в алгоритме выполнения которых он допустил ошибку, и сравнивает полученные ответы с образцом. Учащиеся, не допустившие ошибок, выполняют творческие задания.

7. Этап повторения проводится в соответствии с технологией, также как и в предыдущем виде урока.

8. На этапе подведения итога урока учащиеся повторяют алгоритмы, вызвавшие затруднения, и анализируют допущенные ошибки.

Уроки рефлексии требуют определенных усилий со стороны учителя, выявления и учета типичных ошибок детей, умения подвести ученика к осознанию причины ошибки и ее устранению. Структурно этот тип урока похож на типовой урок работы над ошибками, но в современной трактовке урок рефлексии предполагает осознание каждым учеником причины ошибки и поиск путей ее устранения, что усиливает личностную направленность обучения. Рассмотрим этапы создания урока рефлексии учителем.

Алгоритм конструирования урока рефлексии.

1. Анализ типичных ошибок и затруднений по выбранной теме.

2. Составление списка способов действий (норм), которые требуют тренинга и коррекции ошибок.

3. Подбор заданий самостоятельной работы для этапа актуализации знаний на применение зафиксированных действий (норм).

4. Подготовка образцов выполнения самостоятельной работы и эталона для самопроверки.

5. Проектирование способа повторения с учащимися и фиксации выбранных норм.

6. Проектирование деятельности учащихся, не допустивших ошибок.

7. Конструирование диалога по уточнению алгоритма исправления ошибок.

8. Конструирование диалога для этапа локализации затруднений (выявление мест и причин затруднений).

9. Конструирование диалога по постановке цели коррекционной работы.

10. Выбор заданий для этапа самостоятельной работы с самопроверки по эталону.

11. Подготовка эталона для самопроверки.

12. Проектирование способа коррекции ошибок на этапе самостоятельной работы с самопроверкой по эталону.

13. Составление списка норм для этапа повторения, выбор соответствующих заданий и форм работы.

14. Определение способа и проведения этапа рефлексии.

4. Уроки развивающего контроля

Развивающая цель: формирование способности учащихся к осуществлению контрольной функции.

Обучающая цель: контроль и самоконтроль изученных понятий и алгоритмов.

Уроки развивающего контроля предполагают организацию деятельности ученика в соответствии со следующей структурой.

1. Написание учащимися варианта самостоятельной или контрольной работы.
2. Сопоставление с эталоном выполнение этой работы.
3. Оценка учащимися результата сопоставления в соответствии с ранее установленными критериями.

В зависимости от того, кто является держателем эталонного варианта, различают следующие формы организации развивающих контрольных уроков:

– уроки на самоконтроль (ученик сам проверяет задание по выданному ему эталону);

– уроки взаимоконтроля (проверяет другой ученик, причем, способность к самооценке формируется через проверку справедливости оценки, поставленной другим учеником);

– уроки педагогического контроля (проверяет учитель, а ученик по памяти сверяет свою работу с выданным образцом).

Проводя уроки контроля в соответствии с технологией деятельностного подхода полезно придерживаться следующей структуры.

1. Организационный момент посвящается сообщению темы контроля и формы контроля.
2. Актуализация знаний предполагает повторение основных алгоритмов и понятий по теме.
3. Написание учеником контрольной и самостоятельной работы аналогично этапу постановки проблемы.
4. Этап самоконтроля аналогичен этапу открытия нового знания.
5. Этап согласования оценок аналогичен этапу первичного закрепления.
6. Этап повторного контроля предполагает переоценку учеником собственной деятельности после согласования вариантов оценок, что происходит после урока (во внеурочное время).

При проведении итогов урока проговаривается механизм деятельности по контролю для формирования способностей к выполнению контрольной функции, то есть учащийся должен осознать, что контроль осуществляется по следующему алгоритму:

– предъявление контролируемого варианта;

– наличие понятийно обоснованного эталона, а не субъективной версии;

– сопоставление проверяемого варианта с эталоном по оговоренному механизму;

– оценка результата сопоставления в соответствии с заранее обоснованными критериями.

Особенность данного вида работы при деятельностной технологии заключается в том, что самостоятельность действий учащихся не сводится только к выполнению предложенных заданий, но включает и самостоятельный контроль, и оценку своих действий.

Задачи таких работ:

– определение самими учащимися уровня освоения предложенного материала;

– выработка «инструмента» самоконтроля и самооценки.

Учитель подключается к проверке и оценке только в том случае, если от учащихся поступит запрос на помощь в проверке данной работы.

После самостоятельной работы обязательно следует коллективный разбор выполнения предложенных учителем заданий, при котором ученик может проверить:

– правильность выполнения задания;

– правильность способов проверки;

– объективность своей оценки выполненной работы.

Работу учащихся над ошибками полезно строить через обнаружение причин своих ошибок с помощью выполнения системы последовательных операций:

– осознание (воспроизведение) собственных действий, которые привели к ошибочному решению (Как я действовал?);

– построение (восстановление) эталонного варианта общего способа действия (его операционный состав) по решению подобных задач (Как надо действовать?);

– сравнение собственных действий с эталоном (общим способом) и выявление в них ошибочных операций (В чем моя ошибка?);

– вывод о причинах ошибки и правильном выполнении действия (Правильное выполнение действия).

5. Особенности уроков систематизации и обобщения

Развивающая цель: формирование способности учащихся к новому способу действия, связанному с построением структуры изученных понятий и алгоритмов.

Обучающая цель: выявление теоретических основ построения содержательно-методических линий.

Уроки общеметодологической направленности проводятся в начале и в конце изучения определенных тем, глав курса, разделов. В первом случае эти уроки будут являться уроками построения ориентировочной основы действия (по П.Я. Гальперину [22]) (Что мы будем изучать по этой теме, чему научимся?). Во втором – уроками систематизации и обобщения изученных способов действий. (Чему научились? В какой последовательности осваивали материал и почему? Какие математические положения освоили и какие ранее известные знания использовали?). При любом варианте уроки этого вида будут направлены на включение нового знания в систему знаний.

Когда схема ориентировочной основы действий (схема изучения нового раздела) известна, она выступает мощным дидактическим инструментом, который может использовать учитель для организации учебной деятельности учащегося на протяжении всего процесса освоения содержания. При этом учащиеся воспринимают материал не как разрозненные факты, а как целостную систему, все элементы которой связаны между собой. Реализации этой идеи полезно посвящать целый урок.

Схема главы или раздела должна предлагаться учащимся не в готовом виде, а конструироваться вместе с детьми.

6. Учебные задания и их функции

При конструировании урока математики необходимо учитывать не только определенные этапы урока, но и специфику математического содержания: основную цель курса, его логику, методические приемы и подходы, которые способствуют его достижению и находят отражение в школьных учебниках математики.

Каждый урок строится на системе заданий, в процессе выполнения которых ученик овладевает знаниями, умениями, навыками, продвигаясь в своем развитии [36]. От того, какие задания подбирает учитель для конкретного урока, в какой последовательности их выстраивает, как организует деятельность учащихся, направленную на их выполнение, зависит достижение целей обучения, степень активности и самостоятельности учащихся.

Учебные задания являются основным средством организации учебной деятельности школьников. В них отражаются цели, содержание, методы и формы обучения.

Через учебные задания реализуются различные функции обучения:

– мотивационные (предлагаются задания в игровой форме, проблемные ситуации);

– развивающие (задания, в процессе выполнения которых формируются и развиваются психические процессы ученика);

– познавательные (в результате выполнения данных заданий ученик подводится к новым знаниям или осознанию нового способа деятельности);

– дидактические (в процессе выполнения таких заданий воспитываются различные качества личности: аккуратность, внимательность, прилежание, произвольность поведения; задания, которые готовят ребенка к пониманию смысла проблемной ситуации; задания, выполнение которых обусловливает обобщение способа действия или понятия);

– контролирующие (задания, качество выполнения которых показывает педагогу и самому ребенку уровень овладения им знанием или способом действия).

В дидактике учебные задания классифицируют по различным основаниям. В зависимости от этапов обучения выделяются:

– задания на актуализацию знаний, умений и навыков (задания, выполнение которых готовит учащихся к пониманию сути и смысла проблемной ситуации);

– задания, связанные с изучением нового материала (задания, пытаясь выполнить которые, ребенок сталкивается с проблемной ситуацией; задания, подводящие детей к осознанию недостаточности наличного уровня знаний или умений);

– на закрепление и применение знаний, умений, навыков (задания, при выполнении которых ребенок применяет вновь приобретенные знания или умения в различных практических ситуациях);

– на повторение (задания, для выполнения которых от учащихся требуется применение ранее полученных знаний или умений в новых или вариативных практических ситуациях);

– контролирующие (задания, процесс, качество или способ выполнения которых учащимися показывает учителю и самому ребенку уровень и качество его достижений на данном этапе).

Использование одного и того же задания на различных этапах урока меняет его тип.

В зависимости от характера познавательной деятельности школьников выделяются:

– репродуктивные задания (в процессе выполнения которых воспроизводятся выученных ранее знания или способы действий);

– тренировочные задания (при выполнении которых ученик либо подражает образцу, данному педагогом, стараясь достичь наибольшего сходства с ним; либо самостоятельно применяет ранее полученные знания, умения и навыки в условиях, аналогичных тем, в которых они формировались);

– частично-поисковые задания (при выполнении которых ученик либо применяет ранее полученные знания, умения и навыки в условиях, отличающихся от тех, которые имели место при их формировании; либо проявляет частичную самостоятельность в выборе способа действия; либо старается перенести имеющийся способ действия в другие условия и применяет его на другом родственном материале);

– творческие задания, в процессе выполнения которых ученик проявляет поисковую активность, выбирает и применяет нужный способ действия, из имеющихся в наличии, на непривычном содержании; либо «изобретает» новый способ действия или видоизменяет старый для выполнения новых функций [36].

Представленные классификации заданий позволяют определить дидактическую цель задания.

7. Анализ урока

Методический анализ урока, включает в себя все компоненты педагогического анализа, но имеет и свою специфику, которая, прежде всего, обусловливается содержанием предмета и методической системой обучения. Авторы образовательных систем или УМК предлагают различные варианты методического анализа урока. Особенность методического анализа урока, предложенного Н.Б. Истоминой [36] заключается в том, что он должен проводиться в два этапа.

На первом этапе учитель сам оценивает свою работу: показывает, удалось ли ему реализовать намеченный план на практике (формулирует цель урока, обосновывает логику своих действий, которые спланировал для достижения этой цели, сравнивает логику запланированных действий с логикой проведения реального урока). На данном этапе рекомендуется остановиться на следующих вопросах.

– Какие моменты урока оказались для учителя неожиданными?

– Что он не смог учесть при планировании урока?

– На какие ответы учащихся не смог отреагировать?

– Пришлось ли ему отступить от запланированных действий и почему?

– Заметил ли он свои речевые ошибки, недочеты, неудачно сформулированные вопросы?

– Считает ли учитель, что урок достиг поставленной цели? Что является критерием этой оценки? (Активная работа школьников и интерес к уроку, успешное выполнение самостоятельной работы и т.д.)

На втором этапе все эти вопросы – предмет дальнейшего обсуждения урока коллегами (методистом, студентами), присутствующими на уроке.

План этого обсуждения можно представить в виде следующей последовательности вопросов.

1. Соответствует ли логика урока его цели? (При обсуждении данного вопроса полезно остановиться не только на реальном уроке, но и на той логике, которая лежала в основе его планирования.)

2. Какие виды учебных заданий использовал учитель на уроке: тренировочные, частично-поисковые, творческие? Какие из них заслуживают положительной оценки? Почему?

3. Соответствуют ли учебные задания, подобранные учителем, цели урока?

4. Какие функции выполняли задания, предложенные учителем: обучающую, развивающую, контролирующую? Что заслуживает положительной оценки?

5. Грамотно ли учитель использовал математическую терминологию, предлагал учащимся вопросы и задания?

6. Какие методические приемы, используемые учителем на уроке, заслуживают положительной оценки? (При работе над отдельными заданиями, при изучении нового, при закреплении, проверке?)

7. Какие формы организации деятельности учащихся (индивидуальная, фронтальная, групповая), применяемые учителем на уроке, заслуживают положительной оценки?

8. Удалось ли учителю установить контакт с детьми (обратная связь), успешно осуществлять коррекцию их действий, создавая ситуации успеха, реализовать идею сотрудничества? Какие моменты урока заслуживают положительной оценки с этой точки зрения?

Новые подходы к современному уроку требуют и новых подходов к его анализу. Рассмотрим один из уровневых подходов к анализу и оценке урока, разработанный в Московском центре качества образования.

При этом подходе выделяются структурные компоненты урока для разработки критериев и уровневой экспертной оценки.

- Цели.
- Содержание образования.
- Учебный материал.

– Структура урока (набор этапов).
– Формы.
– Методы.
– Реальный результат урока.
– Самоанализ урока.

Для каждого компонента урока выделяются критерии, которые характеризуются качественными показателями и баллами. Уровни определяются количеством баллов. В уровнях заложен переход от информационного к системно-деятельностному подходу:0 уровень – 0 баллов; 1 уровень – 1 балл;

– 2 уровень – 4 балла;
– 3 уровень – 7 баллов; 4 уровень – 10 баллов.

Нулевой, первый и второй уровни соответствуют информационному подходу построения урока, а третий и четвертый уровни – системно-деятельностному. Рассмотрим подробно подход уровневой оценки урока.

Цели урока. Критерий: диагностичность целей урока, предполагающих обучение и развитие; постановка цели учащимися:

0-й уровень (0 баллов) – цель отсутствует в плане и на уроке;

1-й уровень (1 балл): в ходе анализа урока названа и обучающая, и развивающая цели урока;

2-й (4 балла): цели сформулированы диагностично, измеримо (цель как ответ на вопрос: что должен научиться делать ученик на 45-минутном уроке на конкретном фрагменте учебного материала: различать, получить, освоить; применить в стандартной или нестандартной ситуации – способ, понятие, модель, схему, алгоритм …);

3-й (7 баллов): вовлечение учащихся в постановку цели на уроке, обязательная организация понимания и принятия цели урока учащимися; мотивация её достижения;

4-й (сценарный уровень) (10 баллов): вовлечение учащихся на уроке в корректировку, уточнение или смену цели, учебной задачи при изменении ситуации.

Единица содержания образования. Критерий: различение содержания учебного материала и содержания образования; моделирование учениками на уроке единицы содержания:

1-й уровень (1 балл): названы единица содержания образования и учебный материал (например, учебный материал – безударные гласные в корне слова, а единица содержания образования – способ, алгоритм выбора безударной гласной в соответствии с правилом);

2-й (2 – 4 балла): единица содержания не только названа на словах, но и наглядно представлена ее модель (схема, алгоритм, понятие, способ, различение); выделены все необходимые вспомогательные средства для ее освоения учениками на уроке (опорные знания, умения);

3-й (7 баллов): единица содержания на уроке вместе с детьми выделяется, обсуждается и моделируется в ходе рефлексии;

4-й (сценарный уровень) (10 баллов): на уроке с учетом ошибок учеников учителем «включается» незапланированное содержание образования, которое оказалось недостающим для освоения запланированной единицы содержания образования (гибкое дополнение в возникшей образовательной ситуации содержания образования).

Учебный материал. Критерий: подбор учебного материала, способствующего освоению запланированной единицы содержания образования на основе собственной мотивации учащихся:

1-й уровень (1 балл): учитель подобрал учебный материал, соответствующий целям урока, единице содержания и программным требованиям; отсутствие избыточности и недостаточности подобранного учебного материала для раскрытия цели и единицы содержания;

2-й уровень (3 балла): материал подобран с учётом работы с мотивацией, интересом учащихся (содержит проблемность, задачу-«ловушку», привлекаются аналогии, интересные или противоречивые факты, решения, позиции, дополнительные источники информации и т.п.);

3-й уровень (7 баллов): выстроенная структура, логика подачи учебного материала позволила учащимся на уроке успешно осваивать запланированную единицу содержания образования на основе их мотивации;

4-й (сценарный уровень) (10 баллов): на уроке в случае незапланированных сбоев учащихся и, в связи с этим, необходимость освоения незапланированного содержания образования учитель по ходу импровизационно конструирует, подбирает дополнительный учебный материал.

Структура урока (набор этапов)

Критерий: соответствие выбранной структуры урока цели урока и полной психологической структуре деятельности учащихся:

1-й уровень (1 балл): соответствие запланированного набора этапов урока названным, в соответствии с целью урока;

2-й (2 – 4 балла): на уроке все запланированные этапы организованны до звонка, без выхода за пределы временных рамок;

3-й (7 баллов): на уроке наблюдается соответствие структуры урока полной психологической структуре деятельности учащихся: мотив – цель (учебная задача) – действия по ее решению – самоконтроль – самооценка – самокоррекция (нет лишних или недостающих этапов);

4-й (сценарный уровень) (10 баллов): запланированная структура урока изменяется при необходимости в силу изменения ситуации на уроке (возврат к уже пройденным этапам, например, постановочному и мотивационному этапу, включение новых этапов, исключение каких-либо этапов и т.д.).

Примечание – все этапы, проведенные после звонка, проставляются баллом 0.

Формы обучения. Критерий: адекватность форм цели, обоснованность их выбора данными педагогической диагностики и рефлексии учащихся:1-й уровень (1 балл): выбранные формы обучения адекватны поставленной цели урока и единице содержания (например, бессмысленно организовывать групповую работу в случае заучивания, выполнения стандартных типовых заданий);

2-й (3 балла): выбор форм обоснован данными педагогической диагностики с предыдущих уроков и детской рефлексии: работа на уроке и диагностические задания спланированы на основе анализа и прогноза ошибок учеников;

3-й уровень (7 баллов): на уроке применяются запланированные формы обучения и диагностические задания; итоговая экспресс-диагностика результатов учащихся проведена (в соответствии с запланированными целями); проводится самооценка на основе предварительного обсуждения критериев оценки.

4-й уровень (10 баллов) (сценарный уровень): на уроке осуществляется работа с пониманием и вариантами непонимания учащихся; проводится оперативная педагогическая диагностика (подготовленная до урока и сценарная, по ходу урока), при необходимости вносятся изменения в запланированные формы обучения (например, вторичный переход к групповой работе для доуточнения группой задачи или уже полученного способа и т.п.).

Методы обучения

Критерий: соответствие используемых методов обучения (репродуктивных, продуктивных) цели урока, данным педагогической и психологической диагностики:

1-й уровень (1 балл): соответствие выбора учителем для данного этапа урока репродуктивных и (или) продуктивных методов целям урока и особенностям изучаемой единицы содержания;

2-й (4 балла): соответствие выбора планируемых на уроке репродуктивных и продуктивных методов данным психологической диагностики (особенностям контингента учащихся) и педагогической диагностики (типов ошибок, вариантов понимания конкретных учащихся) на предыдущих этапах обучения;

3-й (7 баллов): запланированные методы предполагают включение ученика как субъекта на всех этапах его деятельности: постановка учебной задачи, планирование и осуществление действий по её решению, самоконтроль, самооценка, самокоррекция; на уроке учитель следует плану: применяет запланированные методы обучения, без учёта разворачивающейся образовательной ситуации;

4-й (сценарный уровень) (10 баллов): сценарное изменение по ходу урока запланированных методов обучения при необходимости, в соответствии с данными оперативной педагогической диагностики (например, переход от запланированных репродуктивных методов к продуктивным, поисковым или проблемным в случае необходимости: для доопределения задач или уточнения, перепроектирования уже полученного, но «не работающего» способа и др.).

Самоанализ урока

1-й уровень (1 балл): учителем подготовлен самоанализ урока как формальный пересказ;

2-й (2 – 4 балла): в ходе анализа и рефлексии дано обоснование отдельных параметров урока;

3-й (7 баллов): в ходе анализа и рефлексии дано обоснование всех позиций анализа урока, выдержана логика «цель – средства – результат»;4-й (сценарный уровень) (10 баллов): учитель в ходе анализа и рефлексии продемонстрировал способность самостоятельного адекватного обоснования всех структурных элементов урока с учетом изменений плана: с различением замысла и реализации урока, запланированных и достигнутых учащимися результатов.

8. Планирование урока

Общий способ деятельности учителя, связанный с планированием урока был описан в работах Н. Б. Истоминой [36] и представлен виде следующей последовательности вопросов.

1. Какие понятия, свойства, правила, вычислительные приемы рассматриваются на данном уроке? (Ответ поможет четко сформулировать математическое содержание урока и обозначить его тему).

2. Что вы о них знаете?

3. С каким понятием, свойством или вычислительным приемом знакомятся школьники на этом уроке? (Формулируется обучающая цель урока).

4. С какими из них дети знакомятся впервые? С какими уже знакомы? Когда они познакомились с ними? (Найдите эти страницы в учебниках и изучите содержание тех заданий, которые учащиеся выполняли после знакомства с этими понятиями, свойствами способами действий).

5. Какова функция учебных заданий данного урока (обучающая, развивающая, контролирующая)? Какие знания, умения, навыки, приемы умственных действий формируются в процессе их выполнения?

6. Какие задания, предложенные в учебнике, по вашему мнению, можно исключить из урока? Какими заданиями можно его дополнить? Какие задания преобразовать?

7. Как можно организовать продуктивную, развивающую деятельность школьников, направленную на актуализацию знаний, умений и навыков, на восприятие нового материала, на его осознание и усвоение? Какие методические приемы и формы организации деятельности учащихся, известные вам из курса педагогики можно для этого использовать?

8. Какие трудности могут возникнуть у детей при выполнении каждого задания, какие ошибки они могут допустить в процессе их выполнения; как вы организуете их деятельность по предупреждению или исправлению ошибок?

9. Какие формы организации деятельности детей на уроке вы будете использовать?

10. Какие наглядные пособия и раздаточный материал необходимо подготовить к уроку? С какими пособиями будете работать вы, а какие предложите выполнить детям. Какой дидактический материал раздадите всему классу и когда это сделаете?

Определив внутреннюю структуру урока, необходимо продумать и такие вопросы:

– что вы заранее напишете на доске;
– что будете писать на доске вы, а что – дети в процессе обсуждения заданий;
– какие задания дети будут выполнять самостоятельно, а какие – с вашей помощью;
– как вы организуете обсуждение самостоятельной работы;

– какие вопросы вы зададите детям, если они допустят ошибки в вычислениях.

Оформляя конспект урока, записывается его тема, цель, задачи, формируемые универсальные и учебные действия, оборудование, ход урока с указанием этапов урока и времени, отводимого на каждый этап. Содержание урока оформляется в табличной форме (Таблица 2).

Таблица 2

Этап урока	Деятельность учителя	Деятельность учеников	Методическое обоснование

9. Виды форм организации познавательной деятельности учащихся на уроке

Мы описали только несколько возможных вариантов классификации и структуры уроков. В теории и педагогической практике имеют место и другие варианты уроков и их классификаций. Мы не считаем необходимым их излагать, поскольку они рассматриваются в других дисциплинах образовательной программы.

Кроме урока применяются и другие формы организации обучения, рассчитанные либо на всех учеников класса, либо на их часть. В современной дидактике к организационным формам обучения относят обязательные и факультативные, классные и домашние занятия. В начальных классах имеют место дополнительные формы, чаще всего используемые только в течение некоторого времени, а урок, являясь основной формой обучения, применяется постоянно. Всей работой на уроке непосредственно руководит учитель. На дополнительных занятиях работа ведется либо учителем, либо под его руководством самими учащимися.

При групповых формах обучения учитель управляет учебно-познавательной деятельностью групп учащихся класса. К групповым относят также парную работу учащихся. Деятельностью учебных групп учитель руководит как непосредственно, так и опосредованно через своих помощников, которых он назначает с учетом мнения учащихся. В ходе реализации групповой формы работы формируются навыки общения, нравственные качества личности, умение подчинять свои желания общей цели. Учитель, опираясь на коллективный диалог, вычленяет среди учеников группы по степени усвоения материала и выстраивает для каждой группы оптимальный путь достижения планируемых результатов обучения.

Индивидуальная форма работы учащихся в классе (в отличие от индивидуального обучения), по своей сущности есть не что иное, как самостоятельное выполнение одинаковых для всего класса или группы заданий. Однако если ученик выполняет самостоятельное задание, данное учителем с учетом учебных возможностей, то такую организационную форму обучения называют индивидуализированной. С этой целью могут применяться специально разработанные карточки с подобранными, в соответствии с необходимым уровнем усвоения, заданиями.

Рассмотренные организационные формы обучения являются общими. Они применяются как самостоятельные и как элемент урока, или других занятий.

В современной общеобразовательной практике чаше всего используются две общие организационные формы: фронтальная и индивидуальная. Гораздо реже на практике применяются групповая и парная формы обучения. Однако ни фронтальная, ни групповая формы обучения не являются на самом деле коллективными, хотя их и пытаются представить таковыми.

На этот факт обращают внимание М.Д. Виноградова и И.Б. Первин [19]. Они отмечают, что не всякая работа, которая формально протекает в коллективе, является по сути коллективной. По своему характеру она может быть сугубо индивидуальной.

По их утверждению, коллективная работа возникает только на базе дифференцированной групповой работы. При этом она приобретает следующие признаки:

– класс осознает коллективную ответственность за данное учителем задание и получает за его выполнение соответствующую социальную оценку;

– организация выполнения задания осуществляется самим классом и отдельными группами под руководством учителя;

– действует такое разделение труда, которое учитывает интересы и способности каждого ученика и позволяет каждому лучше проявить себя в общей деятельности;

– есть взаимный контроль и ответственность каждого перед классом и группой.

В.К. Дьяченко [30], активный сторонник коллективного обучения, подчеркивает, что при общеклассной (фронтальной) работе не исключается сотрудничество и товарищеская взаимопомощь, определение обязанностей и функций. Все ученики делают одно и то же, они не привлекаются к управлению, так как руководит учебным процессом только один учитель. Коллективное обучение, по его мнению, это такое обучение, при котором коллектив обучает и воспитывает каждого члена группы, который, в свою очередь, активно участвует в обучении и воспитании своих товарищей по совместной учебной работе.

Коллективная форма организации учебной работы – это также общение обучающих и обучаемых в динамических парах или парах сменного состава. Коллективный способ обучения (КСО) не нов, он применялся в 20-30-е гг. XX века в ходе ликвидации неграмотности. С появлением ряда теоретических работ [19] в 70-ые годы прошлого столетия, он получил второе дыхание, но и тогда он не нашел практического распространения в школе. Его преимущества бесспорны, но широкое распространение КСО сдерживается сложностями организационно-методического характера.

На уроке применяются фронтальные, групповые и индивидуальные формы организации учебной деятельности.

При фронтальном обучении учитель управляет учебно-познавательной деятельностью всего класса, работающего над единой задачей. Он организует сотрудничество учащихся и определяет единый для всех темп работы. Педагогическая эффективность фронтальной работы во многом зависит от умения учителя держать в поле зрения весь класс и при этом не упускать из виду работу каждого ученика. Ее результативность повышается, если учителю удается создать атмосферу творческой коллективной работы, поддерживать внимание и активность школьников. Однако фронтальная работа не рассчитана на учет их индивидуальных различий. Она ориентирована на среднего ученика, поэтому отдельные учащиеся отстают от заданного темпа работы, а другие – изнывают от скуки.

Наиболее оптимальной и современной формой обучения, позволяющей реализовывать деятельностный подход, является коллективный диалог – основной инструмент организации учебно-познавательной деятельности учеников. Именно через коллективный диалог осуществляется обмен информацией, общение «учитель-ученик», «ученик-ученик», при котором происходит усвоение учебного материала через речевую деятельность на уровне личностной адаптации.

Вопросы для самопроверки

1. Как трактуется понятие «технология организации урока»?

2. Перечислите структурные части обобщенной технологии организации урока, разработанные в соответствии со структурой основных видов деятельности

3. Охарактеризуйте следующие типы уроков:

– уроки открытия нового знания;
– уроки рефлексии;
– уроки общеметодологической направленности;
– уроки контроля.

4. Какие действия следует продумать при подготовке к уроку. Охарактеризуйте формы работы учителя на уроке.

5. Какие формы организации познавательной деятельности детей используются на уроке?

Задания для самоподготовки

1. Выберите тему урока и сконструируйте урок открытия нового материала.

2. Продумайте возможный вариант анализа и самоанализа вашего урока.

3. Разработайте систему заданий для урока рефлексии по теме, взятой для урока открытия нового материала.

4. Составьте развернутый план для уроков развивающего контроля.

5. Составьте перечень возможных ошибок и предложите план работы по их устранению (тема определяется по выбору студента).

6. Сконструируйте фрагменты уроков, где можно организовать фронтальную, индивидуальную, диалоговую форму организации познавательной деятельности детей.

1.5. Средства обучения математике в начальных классах

План лекции

1. Характеристика понятия. Перечень средств обучения в начальной школе
2. Характеристика современных средств обучения
3. Учебник как основное средство обучения и его функции
4. Характерные особенности современного учебника

1. Характеристика понятия. Перечень средств обучения в начальной школе

Под средствами обучения математике понимается совокупность объектов любой природы, для которых характерно, что каждый из них:

1) представляет полностью или частично заменяет изучаемое понятие;
2) дает новую информацию об изучаемом понятии.

Таким образом, средства обучения рассматриваются как совокупность моделей самой различной природы.

Система средств обучения математике складывается из следующих основных видов пособий:

– учебники по математике;
– учебные пособия, содержащие тот или иной материал в дополнение к учебнику: тетради с печатной основой, карточки-задания для организации самостоятельной работы учащихся, сборники задач и упражнений по математике, материалы для проверки знаний учащихся и др.;
– различного рода методические пособия для учителя;

– материально-предметные (иллюстративные) модели, к которым могут быть отнесены приборы, таблицы, современные интерактивные средства [82].

Применение средств обучения раскрыто в книгах «Средства обучения математике» [84], «Средства обучения и методика их использования в начальной школе» [83].

В настоящее время большое внимание уделяется совершенствованию наглядных пособий. Дидактический принцип наглядности является ведущим в обучении, но его, как и в познании, следует понимать шире, чем возможность зрительного восприятия.

Понятие наглядности требует в процессе обучения специального использования в учебных целях не только различных предметов и явлений или же их изображений, как это было раньше, но и моделей, символов, в том числе знаковых, отражающих в условной форме существенные свойства изучаемых явлений.

Особую роль наглядность играет в обучении детей младшего школьного возраста, т.к. соответствует особенностям их восприятия и усвоения знаний. Воздействуя на органы чувств (зрительные, слуховые и т.д.), средства наглядности обеспечивают разностороннее, полное формирование образа, понятия и тем самым способствуют более прочному усвоению знаний, пониманию связи научных знаний с жизнью. Такой вид наглядности в настоящее время широко используется в учебниках и учебных вспомогательных материалах по математике в начальных классах

Прежде чем отобрать для урока тот или иной вид наглядности, необходимо продумать место его применения в зависимости от его дидактических возможностей. При этом следует иметь в виду в первую очередь цели и задачи конкретного урока и отбирать такие средства, которые четко выражают наиболее существенные стороны изучаемого материала и позволяют ученику вычленять и группировать те существенные признаки, которые лежат в основе формируемого на данном уроке понятия.

2. Характеристика современных средств обучения

Следует особо отметить, что современная школа медленно, но все более стремится к использованию интерактивного оборудования. Правильно подобранные комплекты интерактивных устройств и грамотное их использование позволяет принципиально изменить технологию преподавания, обеспечить активное и заинтересованное участие обучающихся во всем, что происходит на уроке. Все большее применение находят инновационные учебно-методические комплексы (ИУМК) по математике в начальной школе [82].

К образовательным информационно-коммуникационным средствам можно отнести:

– средства, обеспечивающие базовую подготовку (электронные учебники, обучающие системы, системы контроля знаний);

– средства практической подготовки (задачники, практикумы, виртуальные конструкторы, программы имитационного моделирования, тренажеры);

– вспомогательные средства (энциклопедии, словари, хрестоматии, развивающие компьютерные игры);

– комплексные средства (дистанционные учебные занятия).

Перечисленные средства начинают активно внедряться в образовательный процесс.

Хорошим подспорьем для освоения технологии дистанционного обучения может служить, например, удобная среда обучения математике для начальной школы «Мат-Решка». Она предоставляет возможность каждому ребёнку изучать математику в соответствии с его способностями, предлагает ученику индивидуальную траекторию познания, которая учитывает интересы и возможности ребёнка в освоении материала. Тренажёр полезен как сильным учащимся, так и детям с особыми образовательными потребностями. Привычным для урока стало использование презентаций с некоторыми дополнительными возможностями. Ярче и нагляднее стал используемый дидактический материал. Используя современные интерактивные технологии, учителя значительно экономят свое время и силы, как при подготовке уроков, так и при обработке проверочных работ и тестов. Результатом внедрения и интенсивного использования интерактивных технологий становится существенное повышение эффективности работы педагогов, уровня и качества знаний учеников.

3. Учебник как основное средство обучения и его функции

Неизменным, действенным и самым распространенным средством обучения остается учебник.

В широком смысле учебник есть книга, в которой излагаются основы научных знаний по определенному учебному предмету. Содержание учебника представляет собой дидактически обоснованную систему сведений и заданий различного характера, выражающих основное содержание той или иной науки, отобранных с учетом цели обучения, возрастных особенностей обучающихся, закономерностей протекания учебного процесса в этом возрасте, уровня учебно-образовательной подготовки учащихся. Структура учебника включает в себя текстовые задания как главный компонент и внетекстовые, вспомогательные компоненты. К внетекстовым компонентам относят: аппарат организации усвоения (вопросы и задания, памятки или инструктивные материалы, таблицы и шрифтовые выделения, иллюстративный материал и другое) и аппарат ориентировки, включающий предисловие, примечания, приложения, оглавление и всякого рода указатели.

Среди видов учебной литературы особое место занимает школьный учебник, который по своему содержанию и структуре соответствует учебной программе по предмету. Учебник относят к основным средствам обучения математике.

В настоящее время в начальной школе используется не только учебник по математике, а целый учебно-методический комплекс (УМК). Последний включает в себя базисный учебник, методические пособия для учителя, тетради на печатной основе, пособия разного рода, например, «Для тех, кто любит математику», «Карточки с математическими заданиями и играми», пособия контрольного характера и т. д.

Учебник или УМК должны выполнять в образовательном процессе следующие основные функции.

1. Информирующая функция, т.е. возможность использования учебника (УМК) как источника той или иной информации. В современных учебниках по математике для начальных классов это материал, обеспечивающий овладение определенной системой математических понятий и общих способов деятельности по ведущим содержательным линиям: «Числа и величины», «Арифметические действия», «Текстовые задачи», «Пространственные отношения. Геометрические фигуры», «Геометрические величины», «Работа с данными»; овладение первоначальными представлениями о ведущем математическом методе познания реальной действительности – математическом моделировании; формирование обобщенного умения решать задачи и целого ряда универсальных учебных действий.

2. Развивающая функция, т.е. возможность использования учебника (УМК) в целях формирования необходимых навыков и умений, а более широко – вообще стимулирования и поддержки интеллектуального и личностного развития учащихся. В курсе математики это:

– развитие основ логического мышления и соответствующего им языка;

– формирование способности к продолжительной умственной деятельности;

– развитие математической речи и аргументации;

– развитие умений оперировать знаково-символическими средствами, выражать содержание (объекты, явления, признаки, отношения, действия, преобразования) в разных символических формах, переходить от одного языка к другому, отделять содержание от формы его представления;

– развитие начал творческой деятельности (пространственного воображения, способов решения задач, форм представления информации и т. д.).

3. Систематизирующая функция по отношению к системе математических понятий и в целом к материалу, обеспечивающему реализацию программы по математике.

4. Контролирующая функция. Она обеспечивается, встроенным в учебник и (УМК) инструментарием для оценки планируемых результатов освоения программы по математике для начальной школы.

5. Мотивирующая функция, особенно связанная с развивающей функцией, в частности с развитием личности. Реализация этой функции обеспечивается особым материалом, который возбуждает и поддерживает у учащихся интерес к предмету, обеспечивает у них возникновение и стабильное существование внутренней мотивации работы с этим учебником.

В настоящее время разработаны дидактические требования, предъявляемые к написанию учебников:

– содержание должно излагаться на научной основе, отражать основные положения математики (законы, свойства, правила);

– материал необходимо излагать в доступной форме от простого к сложному, в соответствии с возрастными возможностями младших школьников;

– учебный материал должен быть расположен в системе, последовательно и представлен на наглядной основе.

4. Характерные особенности современного учебника

Современные учебники нового поколения являются комплексной моделью, которая отражает процесс развивающего обучения. Они значительно отличаются от учебников, реализующих знаниевую парадигму, особенно в части методических требований к учебнику и к системе заданий учебника в частности. Рассмотрим более подробно особенности учебников «Моя математика» [53; 54], которые разработаны в рамках образовательной системы «Школа 2100» (авторы Т.Е. Давыдова, С.А. Козлова, А.П. Тонких). УМК по математике, разработанный выше названными авторами, вполне можно отнести к учебникам нового поколения. В них сделана попытка реализовать все новое, что имеется в теории учебника, все находки ранее изданных учебников математики для начальной школы таких авторов как И.И. Аргинская, Н.Б. Истомина, Л.Г. Петерсон и др.

Авторам удалось разработать единый методический аппарат для всех учебников, обеспечивающий реализацию проблемно-диалогической технологии с учетом специфики возраста и предмета и принципы обучения, заложенные в концепции данной образовательной системы, на необходимость которых неоднократно указывал Л.В. Занков [32]. Он подчеркивал, что в основе построения учебника должна лежать методическая система.

Особенности методического аппарата учебников «Моя математика» состоит в следующем.

1. Данный курс, в соответствии с общими педагогическими принципами Образовательной системы «Школа 2100», ориентирован на формирование функционально грамотной личности средствами предмета. Учебники «Моя математика» написаны с учетом проблемно-диалогической технологии введения новых знаний. Изучение каждой самостоятельной темы состоит из 3-х основных этапов: вводно-мотивационного, операционно-познавательного и рефлексивно-оценочного. Каждый разворот учебника представляет собой сценарий урока. Если урок направлен на введение нового знания, то он имеет следующую структуру.

– Актуализация знаний и постановка учебной проблемы.
– Совместное открытие нового знания.
– Первичное закрепление.
– Самостоятельная работа.
– Повторение и закрепление изученного материала (тренировочные упражнения).
– Итог урока.

Уроки повторения, закрепления и обобщения знаний имеют следующую структуру.

– Актуализация знаний.
– Самостоятельное формулирование темы и целей урока.
– Повторение и обобщение ранее изученного.
– Итог урока.

В методических указаниях к учебнику обращается внимание на то, что работа с каждым заданием в отдельности должна состоять из следующих циклов: разъяснение смысла задания, выстраивание плана работы, самоконтроль и самооценка (рефлексия).

Таким образом, реализуются требования к учебнику, которые предъявлялись ведущими дидактами (Л.В. Занков, В.П. Беспалько, И.Я. Лернер, М.Н. Скаткин), которые неоднократно подчеркивали, что в учебнике в той или иной мере должна быть запрограммирована методика обучения.

2. Особенностью учебников является их модульная структура. Весь текст учебника разбит на модули, названные «путешествиями». Модули соотнесены с учебными четвертями. Каждый модуль состоит из входного текста (одновременно являющегося и выходным) и основной (обучающей части). Входной (выходной) текст модуля предназначен как для самоконтроля и самооценки учащихся, так и для самоконтроля и самооценки учащихся и для создания проблемной ситуации, выполняющей мотивационную функцию к познанию нового на протяжении всего обучающего модуля в целом. В соответствии с этим входной (выходной) текст имеет два уровня сложности:

– к первому уровню относятся задачи, которые к этому времени большинство детей должны уметь решать;

– ко второму уровню относятся задачи, которые к этому времени большинство детей не умеют решать.

Осваивая текст, ученик проясняет для себя, что он знает, чего не знает и чему должен научиться, работая с основными материалами модуля. После прохождения модуля он еще раз возвращается к задачам текста и проверяет себя.

3. Содержание учебников построено в виде диалогов, вступая в которые, отвечая на вопросы, поставленные авторами учебников, дети с высокой степенью самостоятельности могут «открывать» для себя новые знания, учиться действовать, ставить цели, критически оценивать и при необходимости коррек-

тировать свои действия.

В соответствии с принципами адаптивности, психологической комфортности и развития все тексты учебника связаны в пределах каждого путешествия сквозными персонажами и сюжетами. Использование на уроках ситуаций, когда ответ на поставленный вопрос дается не учеником, а персонажем, обеспечивает дополнительные возможности для снятия психологической напряженности, страха ребенка перед возможностью совершить ошибку, т.к. в данном случае ему предложена роль независимого наблюдателя, только лишь оценивающего чужой ответ.

4. В учебниках «Моя математика» реализуется принцип управляемого перехода от деятельности в учебной ситуации к деятельности в жизненной ситуации, что является реализацией требования стандартов нового поколения, где указывается на необходимость учить добыванию и применению знаний в реальной деятельности, решению «жизненных» – компетентностных задач. В этой связи учебники выстроены так, что в 1-2 классах детям предлагается работа с типовыми математическими моделями, соответствующими их возрастным особенностям. В 3 классе осуществляется переход от решения «типовых» математических задач к задачам, представляющим собой модели жизненных ситуаций. Они сконструированы как некоторые игровые ситуации, приближенные к жизненным. Учебник предлагает тексты, направленные на обучение детей решению таких задач, путем трансформации их в цепочку «типовых» задач. В 4 классе «жизненные» задачи решаются детьми самостоятельно.

5. Материалы учебника «Моя математика», начиная с 3 класса, тесно связаны с такими содержательными областями, как окружающий мир, информатика и литературное чтение, что позволяет реализовать в учебнике принцип целостности

содержания образования. Учебники реализуют еще один важнейший аспект межпредметных связей – взаимосвязь между обучением математике и обучением языку. В учебнике заложены возможности целенаправленного формирования логического мышления, математической речи. Работа с предлагаемыми в учебнике текстами требует от учащихся умения высказать свое мнение, обосновать его, выстроить цепочку логических рассуждений. Такие умения относятся к универсальным учебным действиям и соответственно относятся не только к области математики, но и к мышлению в целом, и к языку в частности как средству коммуникации.

Рассмотрим особенности содержания учебников «Моя математика». Они состоят в следующем.

Предлагаемый курс математики представляет собой сочетание содержания обучения, сложившегося в течение многих десятилетий с компонентами, выходящими за пределы стандарта, но включенными в авторскую программу. Эти новые компоненты не только способствуют интеллектуальному и общекультурному развитию учащихся, но и повышают их возможности в освоении традиционных математических знаний. В них арифметический, алгебраический и геометрический материал объединен с элементами комбинаторики, теории графов, логики, дано представление о простейших понятиях теории вероятностей и математической статистики. Этот материал помогает сформировать в старших классах важнейшие компетенции, связанные со сбором материала, анализом данных, планированием и прогнозированием, умением выделять структурные связи в сложных системах, что предусмотрено современным стандартом второго поколения.

В основе построения курса лежит идея о том, что обучение математике должно обеспечивать высокую алгоритмическую подготовку учащихся, а также формировать у них представления о моделях и моделировании как способе научного познания.

В учебниках, наряду с традиционными способами записи информации, существенное место занимают таблицы, графы, линейные столбчатые и круговые диаграммы, что способствует формированию умения использовать язык математики во всех областях жизнедеятельности, помогает более осознанно подходить к работе с компьютером.

Курс построен по спирали и направлен на формирование системы математических понятий и общих способов действия. Каждая тема на новом витке спирали позволяет осуществить повторение ранее изученного на более высоком уровне, устанавливая причинно-следственные связи, находя общее и различное между объектами.

Основной структурообразующей линией учебников «Моя математика» традиционно является линия «Числа и операции над ними», все остальные линии рассматриваются наряду с ней и, по возможности, в связи с ней.

Обобщая выше сказанное, можно отметить, следующее:

– учебники «Моя математика» формируют у ученика целостную систему знаний, являющуюся ориентиром для поиска нужной информации и решения творческих задач;

– на освоение системы знаний тратится лишь часть учебного времени, значительное время используется на формирование навыка самостоятельного решения проблем и поиска информации;

– логическая связь понятий и преемственность содержания внутри учебника и между учебниками одной предметно-методической линии способствует пониманию содержания предмета изучения;

– объяснение изучаемого материала на примерах из жизни ученика развивает умение искать причины и смысл происходящего;

– наличие в учебных изданиях не только основного, но и дополнительного содержания способствует развитию умения работать с информацией; кроме того, методический аппарат направляет деятельность ученика на использование содержащейся в учебнике информации; рубрикация текста, выделение главных мыслей и ключевых понятий помогает выделить нужную информацию;

– наличие вопросов для актуализации знаний, необходимых для изучения новой темы, учат применению имеющихся знаний;

– задания к иллюстрациям развивают наблюдательность, умение «вычитать» информацию по иллюстрациям;

– в процессе работы с учебником у детей формируется мотивация учебной деятельности, то есть ученик всегда знает, что за учебный материал он будет изучать, каковы конкретные задачи и ожидаемый результат изучения.

Учебники по математике авторов В.Н. Рудницкой, Т.В. Юдачевой разработаны в соответствии с основными положениями общей концептуальной основы предметов, изучаемых в начальной школе. В основе построения учебника лежат такие понятия, как «число», «множество», «величина», «отношения», рассматриваемые на основе моделирования.

Учебный комплект для первого класса состоит из учебника и двух рабочих тетрадей. Учебник построен по тематическому принципу: материал распределен не по урокам (кроме первого года обучения), а по темам.

В первом полугодии первого класса учащиеся работают по программе интегрированного курса «Грамота», а начиная со второго полугодия, по учебнику, который используется в комплексе с двумя рабочими тетрадями. В содержание учебника включен справочный материал.

Учебники для 2-4 классов построены по одной и той же определенной структуре. В каждой теме представлен материал, образующий два блока: «Новый материал» и «Вспомни пройденное». В рубрике «Новый материал» изложены необходимые теоретические сведения и система упражнений для его закрепления. В рубрике «Вспомни пройденное» предлагаются задания, цель которых – расширение первичных знаний и умений, а также решение новых видов задач или овладение учащимися новыми способами действий, которые формируют и развивают ключевые математические компетенции.

Для повышения интереса учащихся к предмету в учебник включен материал из истории математики (рубрика «Путешествие в прошлое»).

Учебник содержит материал, предназначенный для организации разнообразных видов работы (коллективное обсуждение учебной задачи, устные вычисления, решение задач без выполнения записей и с записью решения задач, выполнение геометрических построений).

В системе В.В. Давыдова – Д.Б. Эльконина имеется несколько вариантов учебников по математике различных авторских коллективов: учебники В.В. Давыдова, С.Ф. Горбова, Г.Г. Микулиной О.В. Савельевой; учебники А.М. Захаровой, Т.И. Фещенко; учебники Э.И. Александровой. Наиболее распространены учебники Э.И. Александровой.

В учебниках по математике автора Э.И. Александровой, исходят из того, что «величина – корень дерева чисел» (Л.Н. Колмогоров), поэтому в программе и соответствующем ей учебнике предусматривается обучение математике, начиная с расширенного дочислового периода. В этот период рассматривается понятие величины, от которой приходят к понятию числа. Последнее трактуется как отношение одной величины к другой того же рода, принятой за единицу измерения.

Учебник построен тематически. Каждая глава учебника под рубрикой «Проверь себя!» содержит задания, направленные на повторение. В конце второй части учебников каждого класса содержится «Справочный материал», помогающий обобщить полученные знания.

Овладение понятием начинается не с определения понятия, а с решения учебно-практической задачи с опорой на ранее приобретенные умения. Работа над понятием предполагает 3 уровня. Логика развертывания учебного материала построена таким образом, что решение одной задачи влечет за собой решение другой.

Методический инструментарий учебников целенаправленно способствует формированию познавательных и регулятивных универсальных учебных действий.

Учебник математики в начальных классах по образовательной системе Л.В. Занкова (авторы И.И. Аргинская, Е.И. Ивановская) составлен так, что рядом стоящие задания не связаны общей темой, а относятся к разным темам. Более того, могут относиться к разным разделам курса математики. Учебник не имеет разделения на отдельные уроки, он составлен из расчета использования в течение одного урока 3-4 заданий. В учебнике существует дифференциация заданий на основные и «фоновые». Основные задания выделены цветом.

Особенностью учебника является отсутствие четко обозначенных разделов, включение в текст указаний, рассчитанных на помощь тем школьникам, которые затрудняются при выполнении заданий. На последней странице учебника каждого класса имеется обращение к ученикам и занимательные задания.

В учебник для 1 класса включаются элементы истории возникновения рассматриваемых понятий и этапов развития математики. Теоретический материал, предназначенный для заучивания, в 1 классе выделен шрифтом и цветом, а в последующих классах – выделен только шрифтом.

Современные учебники по математике в образовательной системе «Школа России» [62] (М.И. Моро. М.Ю. Колягин, М.А. Бантова, Г.В. Бельтюкова, С.И. Волкова, С.В. Степанова) конкретизируют содержание примерной программы по математике. Раскрывают такие разделы как арифметика целых неотрицательных чисел и основных величин, геометрический, алгебраический материал, решение текстовых задач, понятия доли и дроби, работа с данными.

Учебники издаются в двух частях и построены поурочно. В конце каждой темы дается раздел «Упражнения для закрепления». В конце каждого урока закрепления даются вопросы для повторения изученного материала, а в конце каждой части учебника под рубрикой «Основные сведения из курса математики» помещен справочный материал. Структура материала под рубрикой «Итоговое повторение» подсказывает учителю методику и организацию работы по систематизации и обобщению пройденного.

В основе программы Н.Б. Истоминой [36] лежит то же содержание, что и в программе «Школа России». Отличие состоит в методах, средствах и последовательности изучения отдельных тем курса.

Методическая концепция построения курса направлена на формирование у младших школьников приемов умственной деятельности: анализа, синтеза, сравнения, классификации, аналогии, обобщения. Данная концепция отражена в логике построения содержания курса; в методическом подходе к формированию понятий; в системе учебных заданий; в методике обучения решению текстовых задач; в методике формирования геометрических понятий.

Система развивающих заданий обеспечивается вариативностью содержания и формой подачи материала. С учетом особенностей младшего школьного возраста в учебниках представлены предметные, вербальные, схематические и символические модели, включены задания на наблюдение изменений, происходящих с конкретными объектами, на выявление определенных закономерностей в изменении их свойств.

В учебнике реализуется *систематичность на уровне содержания и на уровне руководства учебной деятельностью*. Содержательная линия выстраивается так, что каждое следующее понятие вытекает из предыдущего и предусматривает повторение изученного материала в тесной взаимосвязи с изучением нового, что создает условия для сопоставления различных аспектов изучаемых вопросов, их обобщения и дифференциации, установления причинно-следственных связей. Усвоение понятий организуется через совокупность заданий, требующих наблюдения, анализа и обобщения предметных действий, установления соответствия между предметными, вербальными, схематическими и символическими моделями. Прямые и обратные задания по переводу предметных действий на язык графической, буквенной и математической символики находят активное применение как при изучении нумерации чисел, вычислительных приемов, так и в процессе решения задач.

Чтобы научить младших школьников анализировать предложенную информацию, высказывать и обосновывать свою точку зрения, в учебник включены диалоги Миши и Маши. Включение в учебник диалогов между Мишей и Машей помогают учителю не только привлечь учащихся к обсуждению того или иного вопроса, но и самому включиться в эту работу, заняв тем самым роль не контролера, а равноправного участника дискуссии.

Дидактические средства являются своеобразными орудиями труда педагога и инструментами познавательной деятельности детей. Они выполняют важные функции в деятельности педагога и учащихся, дают возможность учителю:

– развивать у школьников желание получать новые знания;

– овладевать основами математических знаний, математической деятельностью и математическими методами познания действительности;

– помогают накоплению у детей опыта чувственного восприятия свойств, отношений, связей и зависимостей;

– расширяют возможности педагога при решении образовательных, воспитательных и развивающих задач;

– увеличивают самостоятельную познавательную деятельность детей по математике.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте характеристику понятию «средства обучения».

2. Какие средства обучения используются в курсе математики в начальных классах? Охарактеризуйте информационно-коммуникационные средства обучения, используемые в начальной школе.

3. Какие функции в обучении математике выполняет учебник?

4. Назовите характерные особенности современного учебника.

5. Какие функции выполняют средства обучения в обучении математике?

Задания для самоподготовки

1. Рассмотрите методические материалы по темам «Отрезок и его измерение», «Знакомство с единицами измерения времени», «Площадь и ее измерение». Установите

средства обучения, которые следует использовать при изучении названных тем.

2. Разработайте варианты дидактического материала, который можно использовать в процессе обучения первоклассников счету.

3. Выполните анализ учебников по математике следующих авторов: Э.И. Александровой; А.Л. Чекина.

4. Напишите рассказ на тему: «Учебник будущего».

1.6. Развитие математической речи в начальных классах

План лекции

1. Роль математической речи в развитии мышления и коммуникации младших школьников
2. Теоретические основы развития математической речи
3. Условия развития математической речи

1. Роль математической речи в развитии мышления и коммуникации младших школьников

В проблеме общего развития младших школьников особое место занимают вопросы, связанные с развитием речи ребёнка. Как математические объекты являются неотъемлемой частью существующей действительности, так и культура математической речи есть составная часть общей культуры человека. Математика, как впрочем, и другие предметные области, вносит определённый вклад в развитие речи школьника. Хорошо развитая речь обеспечивает осознанное освоение предметного содержания курса математики учащимися начальных классов, формирование коммуникативных учебных действий, достижение предметных, метапредметных и личностных результатов обучения.

Анализ педагогической практики свидетельствует о низком уровне развития математической речи младших школьников. Это проявляется в том, что учащиеся испытывают затруднения в следующих учебных ситуациях:

– необходимости обосновать правильность своего ответа или свою точку зрения;

– без посторонней помощи понять, а значит, и полностью выполнить учебное задание;

– сформулировать учебную проблему, выдвинуть предположение или гипотезу;

– сделать обобщение или вывод и т д.

Недостатки в развитии математической речи учащихся начальной школы, в значительной степени являются следствием недостаточной теоретической и практико-ориентированной методической разработанности многих аспектов в решении этого вопроса. В этих условиях представляется перспективным поиск средств совершенствования формирования математической речи.

Анализ литературы по данной проблеме позволяет акцентировать следующие положения.

Язык, в том числе и математический, определяется как система вербальных знаков, относительно независимая от индивида, служащая для целей коммуникации, формирования и формулирования мыслей, закрепления и передачи общественно-исторического опыта.

Речь же – это язык в действии, это всегда конкретный процесс использования языковых знаков; это специфически человеческий способ формирования мыслей с помощью языковых средств. К таким средствам относятся математические термины, символы, схемы, графики, диаграммы и т.д. Таким образом, под математической речью понимается совокупность всех речевых средств, с помощью которых можно выразить математическое содержание.

2. Теоретические основы развития математической речи

В современной литературе существует несколько подходов к изучению математического языка: семантический и синтаксический.

Семантика изучает знаки, выражения языка с точки зрения их смыслового значения, определяет смысловое значение каждого математического знака.

Синтаксис изучает правильность построения языковых выражений относительно к их смысловому значению. Синтаксис в математической речи устанавливает правила использования математических знаков в выражениях, равенствах, неравенствах, других предложениях математического языка.

Сочетание двух этих подходов к построению и изучению математической речи означает, что грамматические правила этого языка, конструкции из математических и логических терминов должны получить семантическое толкование, в том числе и в тех случаях, когда они формулируются как синтаксические.

Семантические и синтаксические отношения, образуемые посредством математической речи, необходимо рассматривать совместно с деятельностью по их усвоению. Поэтому в качестве психологической основы усвоения математической речи может выступать теория деятельности, разработанная в отечественной психологии С.Л. Рубинштейном, А.Н. Леонтьевым, В.В. Давыдовым, Д.Б. Элькониным, П.Я. Гальпериным и др. Эта теория утверждает, что любая деятельность складывается из действий, а действия – из операций. Способность осуществлять действие называют умением, а способность автоматически осуществлять операцию – навыком. Соответственно речевой навык – это речевая операция, доведенная до автоматизма; речевое умение – способность применять приобретенные знания и навыки в различных ситуациях общения.

В обучении математике младших школьников используется как естественный, разговорный, так и специальный язык науки математики – математический. Изучение математического языка, знакомство с его компонентами – неотъемлемая часть начального обучения математике. Именно в начальной школе учащиеся впервые знакомятся с искусственным языком математики. Поэтому работе с его знаками следует уделять особое внимание.

На основе анализа строения математического языка, особенностей знаковой деятельности в научном познании, логико-познавательных процессов применения математического языка в различных ситуациях В.А. Дрозд [29] выявляет следующие умения, которые обеспечивают усвоение математической речи: семантические, синтаксические, знакового моделирования, интерпретации формальных математических выражений.

Семантические умения основываются на действии семантизации языковых единиц, состоящем в соотнесении знака и его значения в мышлении. Умение семантизации включает в себя все действия, характеризующие процесс усвоения понятий:

– узнавание математических объектов по их терминам или символам среди других объектов или изображений, выделение существенных признаков и воспроизведение понятий, оценка соответствия словесного и символического выражения предметно-материальной или материальной ситуации;

– подведение математического объекта под понятие, отрицание понятий, нахождение взаимосвязей между ними;

– воспроизведение объектных ситуаций, характерных для математической действительности, в словесно-символической форме, мысленное оперирование математическими терминами и символами.

Синтаксические умения основываются на правилах построения и преобразования языковых единиц. Строение символических математических выражений изучается на основе их сравнения с предложениями естественного языка и выражается в умениях:

– чтения и записи математических выражений;

– преобразования выражений в соответствии с установленными в математике правилами.

Действия знакового моделирования опираются на семантические и синтаксические умения. Операционный состав умения моделировать включает действия по выявлению объектов задачи, связей между объектами, связей между связями.

Основными компонентами операционного состава умения интерпретировать формальные математические выражения являются:

– выделение объективной области с учетом соответствия между объектами и элементарными символами;

– выявление особенностей заданной синтаксической структуры; установление связей между объектами, удовлетворяющих заданную синтаксическую структуру.

Таким образом, анализ умений, которые обеспечивают развитие математической речи, свидетельствует о том, что основной акцент в начальном обучении математике необходимо сосредоточить:

– на понимании младшими школьниками смысла математических понятий;

– на формировании умений устанавливать семантические отношения между понятиями, терминами, символами, переводить жизненные ситуации на язык математики и представлять эту ситуацию в различных математических моделях.

Не менее полезно выполнять и обратную операцию, интерпретировать информацию, заданную на языке математики, на обычном языке

Заметим, что в младшем школьном возрасте речевое развитие детей преимущественно осуществляется двумя путями: через подражание речи окружающих, и в первую очередь речи учителя, и посредством целенаправленного обучения. Формирование связной речи путем подражания особенно эффективно на начальном этапе изучения предмета, поскольку младшие школьники еще обладают особыми способностями к «впитыванию» образцов речи и в то же время у них уже сформирована готовность к овладению различными структурами математической речи.

В связи с этим уместно отметить, что речь учителя младших классов – это не только главный инструмент профессиональной деятельности, не только форма обучения учебному предмету, это в то же время и средство, и прием обучения. Именно в младших классах учитель впервые должен дать основы знаний о языке как средстве общения и средстве познания, рассказать о законах его функционирования (пусть на самом простом, доступном пониманию младших школьников уровне), сформулировать главные требования к речи вообще и математической речи в частности.

3. Условия развития математической речи

Целенаправленное обучение предполагает реализацию, по меньшей мере, следующих условий:

– создание положительной мотивации к освоению математической речи;

– систему специальных упражнений, инициирующих процесс формирования и развития математической речи;

– организацию обучения, при котором ученик постоянно вовлекается в активную речевую деятельность, в процесс самостоятельного поиска знаний и употребления математической речи.

Одним из начальных этапов является создание положительной мотивации обучения математической речи. С этой целью вводятся элементарные сведения: для чего нужна речь обычная разговорная и математическая, что такое высказывание, каким оно бывает (виды высказываний), как строится высказывание, вывод, сообщение. Особую роль при этом играют те задания, которые развивают в детях критическое восприятие своей и чужой речи, а также чувство коммуникативной целесообразности. Дальнейшая работа представляет собой обучение учащихся:

– воспроизведению в громкой речи учебной задачи любого задания, плана его выполнения, хода рассуждений, поясняющих процесс и результат выполняемого задания;

– построение индуктивных и дедуктивных высказываний в процессе обоснования своих высказываний;

– оперирование логическими связками «не», «и», «или» и логическими словами «некоторый, каждый, любой».

Для организации активной речевой деятельности учащихся полезно предусмотреть систему специальных упражнений, в процессе которых учитель должен:

– помочь детям осмыслить их речевую практику и на этой основе учить овладевать умением общаться, договариваться;

– создавать ситуацию речевого общения в классе, моделирующую реальное устное общение (работа в парах, в группе);

– побуждать учащихся высказывать свое отношение к тому или иному факту, событию, явлению;

– добиваться использования усвоенного речевого материала;

– направлять внимание школьников на содержание высказываний;

– предусматривать формирование различных видов связной речи: описание, рассуждение, доказательство, обоснование, пояснение, планирование, обобщение;

– проводить систематическую работу над усвоением норм математической речи, предусматривающей реализацию следующих направлений:

- работу над словом (лексический уровень);

- работу над словосочетанием и предложением (синтаксический уровень);

- работу над связной речью – логическое построение высказываний, (уровень текста).

Приведем ряд конкретных методических приемов, нацеленных на развитие математической речи.

Одним из важных условий становления грамотной математической речи учащихся является «язык» учебников. Он бесспорно должен быть образцом логического совершенства, поскольку свои первые шаги в освоении математической терминологии ученик делает, подражая и копируя учебные тексты.

Анализ учебников математики для начальных классов показывает, что для многих из них характерна языковая и логическая небрежность.

Следует отметить, что новое поколение учебников частично преодолевают выше названные недостатки.

Мысль учеников выражается в речи, значит, нужна систематическая работа педагога по усвоению учащимися языковых средств, которые будут оказывать влияние и на развитие мышления. Самым распространенным и эффективным приемом может быть побуждение учащихся давать полное правильное пояснение к производимым действиям. Например, объяснение у доски, «с места», «за товарищем» нашли широкое применение у учителей при отработке алгоритма рассуждений, плана выполнения учебной задачи. Корректировку ответов следует проводить с помощью постановки дополнительных вопросов, привлечения учащихся к исправлению, дополнению, более точной перефразировки рассуждений при решении проблемной задачи.

Учитель много усилий затрачивает на то, чтобы обеспечить образность, выразительность и эмоциональность языкового богатства учащихся. Совершенствование же речи учащихся в смысле ее логичности, последовательности и точности не всегда в центре внимания учителя. Это, в частности, объясняется отсутствием соответствующих упражнений в учебниках, недостаточной разработкой этих вопросов в методических пособиях.

При составлении заданий для развития математической речи важно предусмотреть конкретную цель каждого речевого упражнения. Виды заданий должны быть разнообразными, доступными возрасту обучающихся.

Например.

Придумайте к словосочетанию «значение суммы» как можно больше пояснений.

Получим:

– «значение суммы» – результат действия сложения;

– число, которое получается в результате сложения двух или нескольких чисел;

– число, которое больше каждого из слагаемых или равно одному из них, если одно из слагаемых равно нулю;

– число, из которого можно вычесть одно из слагаемых и получить другое слагаемое;

– число, которое не изменяется, если переставить слагаемые местами и т. д.

Задание 2. Конструирование математических предложений. Предложить детям слова, которые они должны включить в предложение или, используя данные слова, составить известное правило.

Например, нужно составить определение, используя слова: «выражения», «равенство», «соединенные», «два», «знаком», «это».

Задание 3. Составление текстов задач по любой из возможных моделей задачи: схеме, чертежу, выражению, краткой записи и так далее.

Например, составьте текст задачи по чертежу.

Задание 4. Составление математических заданий по данным характеристикам. Обязательным требованием при этом должно быть объяснение хода рассуждений и доказательство их правильности.

Например: даны числа 16, 4, 20. Задания: составь задачу в одно действие; в два действия; с вопросом «на сколько?»; составь, используя данные числа три верных равенства; составное уравнение и т. д.

Задание 5. Прочитай слова и поставь ударение: километр, миллиметр, вычислить, сложить, наименование.

Задание 6. Объясни значение математических терминов: выражение, вычислительное упражнение, неравенство, равенство, уменьшаемое, вычитаемое, составная задача.

Задание 7. Исправь ошибки в математических терминах: «раздилеть», «слажение», «вычисть».

Задание 8. Вставь слова или словосочетания так, чтобы получилось верное высказывание: «От … слагаемых значение суммы не изменится». «Чтобы к числу прибавить сумму, можно … ».

Задание 9. Найди неточности в пояснениях.

а) Объясняя вычисления в выражении 5 + 4, Коля ответил так: «При прибавлении к цифре 5 числа 4 получится 9». Какие речевые ошибки допустил Коля?

б) Выполнив действие 18 + 2 = 20, Наташа ответила: «У меня получилось 20, я сосчитала правильно». Можно ли ее ответ считать полным и правильным?

Особое место в математическом образовании имеют дедуктивные и индуктивные высказывания. Научить детей правильно строить и использовать эти высказывания одна из основных задач учителя, а умение строить такие высказывания есть показатель осознанного и глубокого понимания математического содержания. Кроме того, умение учащихся строить дедуктивные и индуктивные высказывания является неотъемлемой частью логической составляющей математического образования.

Термины «дедукция» и «индукция» могут использоваться в нескольких значениях: метод доказательства, метод изложения материала в учебнике, метод обучения, форма умозаключения.

Термин «индукция» (от латинского – наведение, побуждение) имеет следующие значения:

– вид умозаключения, при котором из двух или нескольких единичных или частных суждений получают новое общее суждение – вывод;

– метод исследования, при котором, желая изучить некоторое множество объектов (явлений), изучают отдельные объекты (обстоятельства), устанавливая в них те свойства, которые присущи всему рассматриваемому множеству объектов; форма изложения материала в литературном источнике, беседе, когда от частных утверждений переходят к общим заключениям и выводам.Методы и приемы обучения младших школьников на этапе усвоения новых знаний и большинстве случаев связаны с индуктивными рассуждениями. Уже сам перевод слова «говорит» о дидактических возможностях данного метода: выводы, получаемые индуктивным путем, связаны с наблюдением, анализом, сравнением, с выявлением общих закономерностей и их последующим обобщением.

В данном случае мы имеем тесную взаимосвязь между методом обучения и методом познания, в частности, методом неполной индукции. Суть этого метода познания заключается в том, что, рассматривая различные частные случаи, мы подмечаем ту или иную закономерность, которая позволяет сделать обобщенный вывод. При этом необходимо учитывать, что в большинстве случаев невозможно исчерпать все частные случаи, поэтому, умозаключение, построенное с помощью неполной индукции, не относится к способам строгого математического доказательства.

С методической точки зрения метод неполной индукции имеет целый ряд достоинств: это и развитие логических приемов мышления (анализ, синтез, сравнение, обобщение), активизация познавательной деятельности учащихся, радость открытия, знакомство с одним из методов познания, используемых в науке. Обучая учащихся индуктивным суждениям, следует предлагать задания, направленные на развитие наблюдательности, которая тесно связана с приемами анализа, синтеза, сравнения, обобщения.

Чем похожи и чем отличаются данные выражения?

1) 3 + 5   3 + 6   2) 8 – 3   8 – 4

1. Сравните значение этих выражений.
2. Какой вывод можно сделать из наблюдений?
3. Составьте пары подобных выражений и проверьте, верен ли ваш вывод для них.

Во втором и третьем классах следует давать задания, требующие самостоятельного установления связей, зависимостей и формулировки обобщения. Наиболее типичным может быть следующее задание: «Сравни выражения. Вычисли их значения.

Сравни полученные результаты. Найди общее и сформулируй правило.»

В первом классе полезно давать подробный план действий, приводящий к выводам и обобщениям.

Задание 10. Даны выражения:

0 + 1; 1 + 2; 2 + 3; 3 + 4; 4 + 5; 5 + 6; 6 + 7.

1. Сравни числа в выражениях.
2. Подумай, как можно их назвать по отношению друг к другу.
3. Вычисли значения выражений.
4. Подумай, как можно назвать одним словом значения этих выражений.
5. Сделай вывод.

В зависимости от класса дети могут сделать различные выводы.

«Значение суммы двух последовательных чисел есть число нечетное». «Значение суммы четного и нечетного числа есть число нечетное».

В процессе обучения индуктивным рассуждениям полезно:

– побуждать учащихся к поискам новых примеров, подтверждающих правильность сделанного вывода;

– учить их сопоставлять вывод с теми фактами, на основе которых он сделан;

– искать такие факты, которые могут опровергнуть сделанный вывод.

В этих случаях может оказаться полезным и прием специального столкновения учащихся с такими случаями, когда полученный вывод оказывается неверным.

Для осуществления преемственности между начальными классами и средним звеном, а также между различными предметными областями необходимо уже в начальных классах учить строить дедуктивные умозаключения.

Как мы уже отмечали, знания о свойствах, закономерностях, взаимосвязях учащиеся начальных классов получают индуктивным путем и по результатам измерения, вычислениям, наблюдения, сравнения, формулируют вывод.

Применение полученного вывода должно строиться путем использования дедуктивных рассуждений, которые воспитывают строгость, четкость, лаконичность мышления.

Образец дедуктивных рассуждений. «Мы знаем, что если к любому числу прибавить 1, то получим непосредственно следующее за ним число. Нам надо к 2 прибавить 1, получится 3, потому что 3 – число, непосредственно следующее за числом 2».

Задание 11. Сравните числа 5 и 8. Ход дедуктивного рассуждения. «Если одно число при счете называют раньше другого, то это число меньше другого. При счете число 5 называют раньше 8, значит, $5 < 8$.»

Задание 12. Реши задачу, обоснуй выбор действия.

Задача. «У Коли – 6 марок, у Пети – 2 марки. На сколько марок больше у Коли, чем у Пети?» Ход дедуктивного рассуждения: «Чтобы узнать, на сколько одно число больше (меньше) другого, надо из большего вычесть меньшее. В задаче нужно узнать, на сколько марок у Коли больше, чем у Пети. Значит, надо из марок Коли вычесть столько, сколько марок у Пети».

Подводя учащихся к дедуктивным высказываниям, полезно иногда вводить игру в сказочные цифры [50].

Например, изучая общие правила вида: «$a \cdot 1$; $a : 1$; $a + 0$; $a - 1$», можно поступить так: сначала предложить вычислить значения выражений $5 : 1$; $3 \cdot 1$; $6 : 6$; $7 + 0$; $8 - 0$ и обосновать полученные результаты.

(Дети объясняют так: $5 : 1 = 5$, так как $5 \cdot 1 = 5$).

После этого предложить игру в сказочную школу, где все числа не похожи на те, которые используются в нашей математике и только числа 1 и 0 обозначаются также.

«Представьте, что вы в сказочной школе. Сможете ли вы тогда вычислить значения следующих выражений? Y : 1;

w : w; z – 0?»

Введение значков побуждает учащихся, использовать дедуктивные высказывания: «При делении любого числа на единицу мы получаем это же число, поэтому в ответе запишем такой же значок, какой использовали для обозначения первого числа».

Предложенный подход к проблеме и изложенные выше приёмы развития математической речи не только расширяют словарь математических терминов, но и прививают интерес к самой науке – математике.

Нередко, работу по развитию речи связывают только с изучением русского языка и литературного чтения, в то время как любая дисциплина может вносить в этот процесс свой вклад. И даже больше, если учитель будет целенаправленно заботиться об освоении учащимися понятийного аппарата изучаемой учебной дисциплины, то можно полагать, что будет выполнена задача, обозначенная в материалах стандарта общего начального образования второго поколения, речь станет средством развития умственной деятельности и основой для формирования коммуникативных учебных действий.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите языковые средства математического языка.

2. Сравните понятия «математический язык», «математическая речь».

3. Перечислите математические умения и навыки, которые следует сформировать у детей в первом, втором, и т.д. классах.

4. Перечислите условия, необходимые для успешного формирования математической речи.

Задания для самоподготовки

1. Выделите преемственные связи между технологией развития математической речи в начальной школе и в дошкольном детстве.

2. Составьте словарь математических терминов, которые должны усвоить дети в каждом числовом концентре.

3. Составьте систему специальных упражнений, инициирующих процесс формирования и развития математической речи по отдельным темам.

4. Проанализируйте учебники 1-4 классов и выберите задания, направленные на развитие математической речи, выделите цель каждого такого задания. Дополните перечень этих заданий составленными самостоятельно.

Глава 2. Изучение нумерации чисел и арифметических действий над числами

2.1. Изучение нумерации целых неотрицательных чисел

План лекции

1. Характеристика десятичной системы счисления
2. Технологии формирования представлений о числе в различных образовательных системах обучения
3. Технология изучения чисел в концентрах сотня, тысяча и многозначных чисел

1. Характеристика десятичной системы счисления

Системой счисления называют язык для наименования, записи чисел и выполнения действий над ними. Существуют позиционные и непозиционные системы счисления. В позиционных системах счисления значение цифры в записи числа зависит от места (позиции), занимаемого ею в этом числе. В непозиционных системах счисления такой зависимости нет.

Способ чтения и записи чисел называют нумерацией. Различают два вида нумерации – устную и письменную.

Многие позиционные системы счисления имеют только письменную нумерацию и не имеют устной нумерации. Название системе счисления дают по отношению между разрядами. Если две (три, четыре и т. д.) единицы одного разряда дают одну единицу следующего разряда, то систему счисления называют двоичной (троичной, четверичной и т. д.).

Изучение математики в начальных классах строится на изучении десятичной системы счисления, в которой 10 единиц одного разряда дают 1 единицу следующего (разряды нумеруют справа налево).

В соответствии с образовательным стандартом предусматривается знакомство детей и с римской непозиционной нумерацией.

Рассмотрим общие положения, на которых базируется устная и письменная нумерация позиционной десятичной системы счисления.

В основу устной нумерации положены следующие принципы.

Принцип поразрядного счета

Назвать какое-то натуральное число – это тоже, что назвать результат счета предметов по одному. Присваивая определенному количеству единиц название (одна, две, три, … девять), получим девять числительных. Если не воспользоваться принципом поразрядного счета – одним из величайших достижений математики, то для пересчета множества предметов с большой численностью потребуется придумать много числительных. Изложим основные его положения.

Множество большой численности удобно считать не единицами, а группами. В десятичной системе счисления за единицу I-ой группы счета берут единицу, за единицу II-ой группы счета – 10 единиц первой группы счета, за единицу III-ей группы – 10 единиц второй группы счета и т.д. Каждой группе счета дается название. Первой – единица, второй – десяток, третьей – сотня и т.д. Каждая группа счета, начиная со второй, образует разрядные числа, названия которых образуются путем слияния названия числа счетных единиц той или иной группы счета (их не более 9-ти) с добавлением названия группы счета. В результате получаются сложные числительные: двадцать, тридцать, пятьдесят, … или двести, триста, четыреста, … . В начальных классах эти числа называют круглыми (Таблица 3).

С помощью этого принципа число различных слов, нужных для названия чисел отрезка натурального ряда чисел от 1 до

999 сокращается до 13 (это слова один, два, ..., девять, десять, сорок, девяносто, сто).

Таблица 3

Единица счета	Запись разрядной единицы счета	Разрядные числа
единица десяток сотня …	1 10 100...	1, 2, 3, 4, …, 9 10, 20, 30, …, 90 100, 200, 300, …

Чтобы назвать какое-либо число на основании принципа поразрядного счета, нужно назвать слева направо разрядные числа, содержащиеся в этом числе.

Например, 457 – четыреста пятьдесят семь (457 равно 400 и еще 50 и еще 7) или 457 = 400 + 50 + 7. Последнюю запись называют суммой разрядных слагаемых.

Чтобы называть числа большие, чем 999 используют еще один принцип: принцип поклассового объединения разрядов.

Согласно этому принципу каждые три разряда, начиная с первого, справа налево объединяются в класс. Каждому классу дается название: класс единиц, класс тысяч, класс миллионов и др. Разрядам, входящим в класс, присваивается название класса: разряд единиц тысяч, разряд десятков тысяч, разряд сотен тысяч и др. Заметим, что при названии разрядов, входящих в класс единиц, название класса опускается.

Чтобы прочитать число большее трехзначного, достаточно разбить его справа налево на классы, объединяя по три цифры в класс; прочитать число в каждом классе по правилу чтения трехзначных чисел и добавить название класса. Название класса единиц принято не произносить. Если единицы в каком-нибудь классе отсутствуют (этот класс при написании числа обозначен нулями), то название этого класса при чтении опускается. Например, 123 000 506 – сто двадцать три миллиона пятьсот шесть.

Письменная нумерация. В десятичной системе счисления для записи чисел используют десять знаков: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Знаки для записи чисел называют цифрами.

Разряд – место для записи цифр в числе. Каждый разряд имеет свое название. Название разрядов совпадает с названием единиц счета – разряд единиц, разряд десятков, разряд сотен и т.д. Кроме того, разрядам дают названия, совпадающие с номером места, занимаемого разрядом в записи числа. Разряды нумеруют справа налево, 1-ый разряд – разряд единиц; 2-ой разряд – разряд десятков; 3-ий разряд – разряд сотен, 4-ый разряд – разряд единиц тысяч и т. д.

Запись чисел ведется на основе принципа поместного значения цифр: значение цифры зависит от места, занимаемого этой цифрой в записи числа. Например, в записи числа 848 первая справа цифра 8 означает восемь единиц в первом разряде или, что в разряде единиц будет 8 единиц, а третья справа 8 означает, что и в разряде сотен будет 8 единиц третьего разряда. В соответствии с этим принципом формируется умение записывать число, сначала трехзначное, затем многозначное.

Чтобы записать число «триста двадцать один» нужно выполнить ряд операций.

1. Определить, сколько разрядов будет в числе. (В числе «триста двадцать один» первое разрядное число триста или три сотни, значит, старший разряд в числе – разряд сотен и число будет трехзначным).

2. Определить, сколько единиц будет в каждом разряде. Триста – значит в третьем разряде – разряде сотен будет 3 сотни или 3 единицы третьего разряда. Следующее разрядное число двадцать – значит, во втором разряде, в разряде десятков будет 2 единицы второго разряда или 2 сотни и, соответственно, в первом разряде будет 1 единица первого разряда. Записываем единицы в каждом разряде слева направо.

3. Многозначные числа записывают по классам, начиная с высшего класса. В каждом классе записывается трехзначное число по правилу записи трехзначных чисел. Один класс от другого отделяется небольшим промежутком – 123 654.

В устной нумерации для обозначения разрядов или классов, не содержащих ни одной единицы, особые слова не требуются, ибо названия этих разрядных единиц просто опускаются. В письменной нумерации на месте отсутствующих единиц в каком-либо разряде или классе ставится цифра 0. Ноль в записи числа сохраняет разряд.

2. Технологии формирования представлений о числе в различных образовательных системах обучения

В «Примерной программе по математике» [62], составленной в соответствие со стандартом второго поколения подчеркивается, что дети должны научиться:

– читать, записывать, сравнивать, упорядочивать числа от нуля до миллиона;

– устанавливать закономерность – правило, по которому составлена числовая последовательность, и составлять последовательность по заданному или самостоятельно выбранному правилу (увеличение / уменьшение числа на несколько единиц, увеличение / уменьшение числа в несколько раз);

– группировать числа по заданному или самостоятельно установленному признаку.

Выпускник получит возможность научиться:

– классифицировать числа по одному или нескольким основаниям, объяснять свои действия;

– выбирать единицу для измерения данной величины (длины, массы, площади, времени), объяснять свои действия.

Понятие числа и вопросы нумерации чисел являются основополагающими в курсе математики начальных классов. Построение всего курса математики зависит от того, какой математический подход к определению числа положен в основу формирования данного понятия.

В математике существует три подхода к определению понятия «число».

1. Теоретико-множественный. Согласно данному подходу, число – это общее свойство эквивалентных между собой, непустых множеств. (Множества, между которыми можно установить взаимно-однозначное соответствие называют эквивалентными и соответственно – равночисленными).
2. При аксиоматическом подходе натуральное число трактуется как элемент множества, на котором установлено отношение «непосредственно следовать за …», удовлетворяющее четырем аксиомам Пеано и которое называют рядом натуральных чисел. Аксиомы Пеано упорядочивают ряд натуральных чисел.
3. В третьем подходе число вводится через измерение величин, а именно число характеризуется как отношение некоторой величины к его мерке.

В существующих образовательных технологиях в адаптированном к возрасту виде используются все три подхода к трактовке понятия «натуральное число», но, как правило, превалирует (выбирается в качестве основного, исходного) первый или третий. Это связано с тем, что эти два подхода могут быть усвоены детьми через освоение доступных для возраста практических операций счета или измерения и логических операций сравнения и выделения общего признака у групп равномощных множеств. Второй подход – аксиоматический – дополняет вышеназванные подходы, поскольку он позволяет упорядочить ряд натуральных чисел и познакомить детей с его свойствами. Без осознания этих свойств, не могут быть усвоены и практические операции по пересчету или измерению.

В большей части существующих образовательных систем обучения в качестве основного используется первый – теоретико-множественный подход к определению натурального числа.

Рассмотрим логическое построение учебного материала в технологиях, использующих теоретико-множественный подход к изучению понятия числа.

В курсе математики начальных классов нумерация целых неотрицательных чисел изучается по концентрам. В большей части образовательных программ выделяют следующие концентры.

1. «Числа от 1 до 10 и число 0».
2. «Числа от 1 до 100», в котором выделяются два этапа: «Числа от 1 до 20» и «Числа от 21 до 100».
3. «Числа от 1 до 1000».
4. «Многозначные числа».

Такая спиралевидная последовательность изучения темы обусловлена тем, что в каждом следующем концентре используются все положения, определяющие нумерацию чисел в предыдущем концентре и вводятся новые понятия, позволяющие расширить понятие о натуральном числе (Таблица 4).

Рассмотрим содержание и последовательность изучения нумерации в концентре «Десяток».

Дочисловая деятельность направлена на выработку умений: выделять признаки у отдельных предметов и групп предметов, сравнивать предметы и группы предметов по указанному признаку, устанавливать взаимно однозначное соответствие между элементами групп.

Таблица 4

Десяток или числа от 1 до 10	Сотня или числа от 1 до 100		Тысяча или числа от 1 до 1000	Многозначные числа или числа большие 1000
	Числа от 1 до 20	Числа от 21 до 100		
Число, цифра, ряд натуральных чисел и его свойства, следующее, последующее и предыдущее число, особенности числа ноль. Операция счета, количественный и порядковый счет. Сравнение чисел.	Образование и десятичный состав чисел от 11 до 20	Счетные единицы: единица, десяток. Разряд десятков. Разрядные числа: десять, двадцать, тридцать, девяносто. Сравнение чисел, в пределах 100	Принципы устной и письменной нумерации. Счетная единица – сотня, счет сотнями, разрядный состав трехзначных чисел. Сравнение чисел в пределах 1000	Счетная единица – тысяча, счет тысячами, разрядный состав чисел. Класс. Принципы устной и письменной нумерации. Сравнение многозначных чисел.

Кроме того, дети упражняются в последовательном назывании слов числительных от 1 до 10 и обратно. Отработка этих умений позволяет сформировать представление о натуральном числе как общем свойстве равномощных групп предметов (множеств).

После такой подготовки формируется представление о числе как общем свойстве групп предметов, которое может быть зафиксировано в слове (числительном) и с помощью знака – цифры.

Определение натурального числа задает следующую логику в выполнении упражнений.

Предлагается сравнить две группы предметов (три звездочки и три кружка). При сравнении дети подводятся к выводу, что эти две группы предметов имеют одинаковый признак – число предметов в группе.

Предлагается назвать этот признак числом три, а затем дети знакомятся с символической записью числа три – цифрой 3.

Закрепление понятия числа можно осуществить через следующую совокупность заданий.

– Установление общего признака у групп предметов и обозначение этого признака числом.

– По заданному числу образовать (нарисовать, выложить на наборном полотне) группы предметов, обладающие этим признаком.

– Из заданной совокупности групп предметов разной природы выбрать группы предметов, обладающие общим признаком, например, «иметь три предмета».

– Совокупность групп предметов разной природы разбить на классы так, чтобы в каждом классе группы предметов имели одинаковое число предметов, обозначить это число соответствующей цифрой.

– Установить соответствие между числом предметов в группе и цифрой, обозначающее число предметов в группе.

Возможны и другие задания. Наиболее полно и последовательно эта совокупность заданий представлена в технологии Н.Б. Истоминой [36].

Понятие «число» формируется в тесной взаимосвязи с понятием «ряд натуральных чисел».

Ряд натуральных чисел подчиняется правилам, которые отмечены в аксиомах Пеано. Три первых аксиомы задают принцип построения ряда натуральных чисел. В адаптированном к возрасту виде они сводятся к следующим положениям.

– Единица – самое меньшее натуральное число. Ряд натуральных чисел начинается с единицы.

– Ряд натуральных чисел бесконечен. Для каждого числа найдется единственное непосредственно следующее (последующее) число, которое на единицу больше данного.

– Каждое натуральное число непосредственно следует только за одним натуральным числом, т.е. для каждого натурального числа найдется одно непосредственно предшествующее ему, и оно на единицу меньше данного.

Усваивая эти свойства, дети знакомятся с еще одним способом получения числа, путем присоединения одного предмета к ранее изученному количеству предметов, и затем полученному количеству предметов ставится в соответствие последующее число, т.е. то число, которое на данный момент вводится. Данный прием превалирует в учебниках математики в следующих образовательных системах: «Школа России» [61], «Школа 2100» [54].

Знакомство с числами сопровождается усвоением практического действия по пересчету предметов и установлению количественной характеристики группы (множества) предметов.

Счет – практическое действие по установлению взаимнооднозначного соответствия между элементами множества и отрезком ряда натуральных чисел, при котором:

– каждому элементу данного множества ставится в соответствие единственное натуральное число;

– каждый элемент второго множества является образом единственного элемента первого множества.

Из анализа определения вытекает следующее правило пересчета, с которым дети знакомятся через совокупность целесообразно подобранных заданий.

– Счет предметов начинают с числа 1.

– При счете нельзя пропускать ни одного элемента.

– Каждый элемент при счете надо посчитать только один раз.

В процессе пересчета предметов, осуществляется упорядочивание предметов в пересчитываемой группе предметов с помощью порядковых числительных: первый, второй, третий и т.д. Последнее порядковое числительное указывает на количество предметов в пересчитываемом множестве. При пересчете предметов используются порядковые числительные, которые позволяют ответить на вопрос: «Который по счету предмет назван?» и «Сколько предметов пересчитали?».

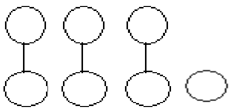
Количественные числительные указывают на результат пересчета, т.е. позволяют ответить на вопрос: «Сколько предметов пересчитали?» или «Сколько предметов в пересчитываемой группе предметов?». В этом проявляется связь между количественными и порядковыми числительными, которую должны осознавать дети, усваивая операцию счета. Следует заметить, что порядковое числительное дает большую информацию, чем количественное.

Сравнить числа – значит, сравнить их по количеству, которое они характеризуют. Стандарт предусматривает формирование умения сравнивать числа по количественной характеристике, записывать и читать модель их сравнения.

3 < 4 (читаем: 3 меньше 4-х или 4 больше 3-х)

При уяснении смысла сравнения можно опираться на различные математические положения.

1. На количественную модель сравниваемых чисел.

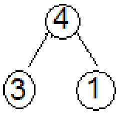


2. На свойство упорядоченности множества натуральных чисел, т.е. на порядок называния чисел при счете (3 < 4, потому что 3 называем при счете раньше, чем 4).
3. На свойства ряда натуральных чисел (число 3 стоит в ряду чисел перед числом 4, следовательно, 3 < 4).
4. На закономерность построения числового луча (число 3 на луче расположено ближе к началу, чем 4, следовательно, 3 < 4).
5. На состав числа (3 < 4, т.к. 4 это 3 да 1).

Состав однозначных чисел. Состав числа подразумевает представление числа в виде двух чисел, значение суммы которых равно данному числу. Состав однозначных чисел подразумевает обучение ребенка умению представлять однозначное число в виде двух чисел. Впервые с составом числа дети знакомятся, присчитывая единицу к заданному числу, т.е. на этапе образования числа последующего для данного. Дальнейшее свое развитие эта тема находит в следующих упражнениях.

1. Представление состава числа на вещественной модели.
2. Представление состава числа на графической модели (числовое лото).
3. Представление состава числа на схематической модели.

4. Представление состава числа на символической или математической модели (4 = 3 + 1).



Состав чисел изучается путем перехода от одной модели к другой. Знание детьми состава чисел есть основа для усвоения табличных случаев сложения и вычитания однозначных чисел.

Особенности числа «ноль». «Ноль» вводится как количественная характеристика пустого множества. Опираясь на имеющиеся представления детей, на выполнение детьми практических действий, которые затем переводятся в символическую модель вида 3 + 0 = 3, исследуются свойства числа «ноль», описанные в аксиомах Пеано. Устанавливается, что число «ноль» не следует ни за одним натуральным числом, его место перед самым меньшим натуральным числом «единица».

В теме «Первый десяток» предусмотрено знакомство с числом 10.

В данной теме число «десять» рассматривается как новое число в ряду натуральных чисел, которое следует за числом «девять» и подчиняется принципу построения ряда натуральных чисел, т.е. оно на единицу больше числа «девять». Кроме того, число «десять» рассматривается как первое число, для записи которого используют две цифры, и как новая счетная единица. На этом этапе знакомства с числом 10 детям предлагается счет предметов десятками (один десяток, два десятка, три десятка и т.д.), то есть счет без называния самих числительных «двадцать», «тридцать» и т.д.

Рассмотрим, какова последовательность изучения и система упражнений, которая используется в альтернативных образовательных системах.

Формирование понятия «число» в программе М.И. Моро и др. [61].

Изучение понятия «число» по данной программе осуществляется в следующей последовательности.

1. Дается задание на запоминание порядка чисел при счете. При этом практикуется прямой и обратный счет.

2. Вводится понятие порядковый и количественный счет, а так же идет ознакомление с правилами пересчета предметов.

3. Сравнение совокупностей предметов путем установления взаимно-однозначного соответствия и выражение результата сравнения словами «больше», «меньше», «столько же», позднее – «на сколько больше», «на сколько меньше».

4. Выделение общего признака группы предметов одной численности (одинаковое число предметов) и обозначение численности на графической модели.

5. Знакомство с числами от 1 до 10 по следующей схеме.

– Образование числа из предыдущего и единицы, последующего без единицы. Это действие выполняется на различных моделях: вещественной, графической, путем рассмотрения жизненных ситуаций.

– Вводится устная и письменная нумерация чисел. На данном этапе вводится печатная цифра, прописная цифра вводится по данной программе гораздо позже.

– Устанавливается количественное отношение данного числа с предшествующим и последующим. Эти отношения не фиксируются в символической записи, т.е. дети устанавливают, что изучаемое число, например, 3 больше 2-х на единицу, но знак сравнения не вводится.

– Изучаются порядковые отношения данного числа с предшествующими и последующими числами. Определяется место данного числа в ряду натуральных чисел. Идет сопоставление количественного и порядкового отношения.

Примечание: на одном уроке рассматривается по два числа, устная и письменная нумерации рассматриваются раздельно и в большом отрыве, знак сравнения не вводится.

Для данной программы наиболее типичными являются следующие упражнения.

1. На способ образования каждого последующего числа путем присчитывания единицы к предыдущему. (Как из числа 3 получить число 4?)
2. На определение места числа в ряду натуральных чисел. (Назови, какие числа следуют в ряду за числом 4 и т.п.)
3. На сравнение чисел (Сравни числа 3 и 4).
4. На состав числа (Из каких чисел можно составить число 4 и т.п.).
5. На запоминание прямой и обратной последовательности чисел в ряду чисел. (Виды заданий: «назови числа от 1 до 5»; «вставь пропущенное число»; «назови самое маленькое число в ряду натуральных чисел» и т.п.).

Последовательность изучения понятия «число» в методике Н.Б. Истоминой [36].

Н.Б. Истомина считает, что, поступая в первый класс, дети имеют представление о числе, но оно выступает для них только как наглядный образ. Дети не могут выделить один предмет, как счетную единицу, умеют ответить на вопрос «сколько?», не владея операцией счета. Количественная характеристика числа осознается ребенком в процессе установления взаимно-однозначного соответствия между предметными множествами и находит свое выражение в понятии «столько же», «больше», «меньше» и т.д. Для отработки необходимых понятий она предлагает следующую совокупность упражнений.

1. Умение выделять признак предметов и выполнять операцию сравнения, классифицировать предметы по заданному одному или двум признакам.

2. Умение устанавливать взаимно-однозначное соответствие между предметными совокупностями. При этом в речи используются слова «столько же», «больше, чем …», «меньше, чем …». Широко используются приемы: наложение предметов одного множества на предметы второго; расположение предметов одного множества под предметами другого множества, образование пар из предметов первого и второго множеств путем соединения предметов одного множества с предметами другого множества.

3. Умение устанавливать взаимно-однозначные соответствия между предметными совокупностями и совокупностями слов числительных. При этом операция счета сводится к нумерации объектов в определенной последовательности. В учебнике предложена система упражнений, которая наряду с формированием операции счета и уточнения порядка слов числительных, позволяет развивать, совершенствовать логические операции. В основном используется прием сравнения графически представленных предметов по признаку количества.

4. Знакомство учащихся с символическим обозначением числа, т.е. цифрой. В отличие от других программ обучения Н.Б. Истомина предлагает при знакомстве с цифрами не ориентироваться на порядок чисел в натуральном ряду. Можно начинать знакомство с любой цифры, группировать по сходству написания. Она предлагает вводить первой группу цифр 1, 4, 7. Такое разделение она обосновывает тем, что в этом случае дети лучше учатся различать понятие «число» как количественную характеристику множества и «цифра» как символ для записи числа. С этой целью уже на этом этапе дети знакомятся с римской нумерацией.

5. Знакомство с порядковым счетом. Особое внимание уделяется осознанию детьми того факта, что каждое число, названное при счете, является одновременно порядковым, т.к. ука-

зывает на порядок предметов при счете. В то же время оно является количественным, т.к. указывает на количество всех перечисленных предметов. Например: дается 4 кружка разного цвета. Детям предлагается пересчитать эти кружки в разном порядке. Дети устанавливают, сколько всего кругов, какой кружок может быть по счету четвертым, третьим. При этом рассматриваются разные комбинации пересчета. Делается вывод, что количество кружков не меняется, а порядок или место каждого кружка зависит от порядка счета.

6. Отработка правил пересчета предметов, которые сводятся к следующим положениям:

– первым при счете может быть указан любой объект данной совокупности, важно, чтобы ему соответствовало числительное 1;

– ни одному объекту нельзя поставить в соответствие два слова числительных;

– ни один объект не должен быть пропущен при счете.

Сравнивая два подхода к формированию понятия числа можно сделать вывод о том, что в первом случае преимущество отдается способу получения числа путем присоединения одного предмета к ранее изученному количеству предметов (прибавлением единицы к ранее изученному числу), т.е. количественная характеристика числа определяется местом числа в ряду натуральных чисел.

Во втором случае упор делается на формирование представления о натуральном числе как общем свойстве равномощных групп предметов (множеств).

Эти различия еще ярче выступают при рассмотрении особенностей ознакомления с понятием «отрезок ряда натуральных чисел». Так в учебниках образовательной системы «Школа России» [61] «ряд натуральных чисел» появляется постепенно вместе с изучением каждого числа и цифры, обозначающей это число. Последовательно рассматриваются отрезки ряда чисел: 1) 1, 2, затем, 2) 1, 2, 3 и 3) 1, 2, 3, 4 и т.д.

При изучении каждого отрезка ряда выполняются однотипные упражнения, например: «Положите 2 круга, придвиньте к ним еще 1 круг. Сколько кругов станет?» Дети, присчитывая, получают число «три». Записывается способ получения числа «три» с помощью символической записи 2 + 1 = 3 (соответственно со знаком «–» 4 – 1 = 3). Далее сравнивается число «два» с числом «три», число «три» с числом «четыре» (в новых изданиях учебника знак сравнения не вводится). Затем, определяется место этого числа в ряду. В результате выполнения таких упражнений при изучении постепенно увеличивающихся отрезков ряда натуральных чисел, по мнению автора, дети убеждаются в том, что числа упорядочены по величине «количество». Получая последующее число, дети знакомятся с соответствующей цифрой, т.е. идет одновременное знакомство с числом и цифрой, его обозначающей.

В методике Н.Б. Истоминой [36] для введения понятия «отрезок ряда натуральных чисел» используется другой подход. Натуральный ряд чисел появляется после изучения детьми однозначных чисел и цифр, с помощью которых они записываются. Например, детям предлагается пересчитать слоников и записать числа, которые они называют при счете. Сам ряд натуральных чисел воспринимается детьми как ряд, с помощью которого можно посчитать предметы, слово «натуральный» не вводится. Затем выясняется, как получилось каждое следующее число, вводятся термины «предыдущее», «последующее число», «следует за числом», «предшествует числу», и через систему упражнений отрабатывается принцип получения каждого последующего и предыдущего числа.

На наш взгляд, в данных программах действительно имеют место существенные различия в методике введения понятий.

Первая программа вводит понятие «отрезок ряда натуральных чисел» индуктивным путем, а вторая – дедуктивным путем. Обе они имеют право на существование, а предложенная в учебниках система упражнений вполне обеспечивает осознание детьми принципа построения ряда натуральных чисел.

Ведущим методом при изучении понятия «натуральное число в пределах 10-ти» является практический метод, который предполагает организацию активной практической деятельности каждого ребенка, направленной на усвоение определенных способов действия с конкретными предметами, а так же с их заменителями. Значительное место должно отводиться к подводящему диалогу, который состоит из системы вопросов и ответов, образцы, которых должен задавать учитель. Как показывает практика, успех усвоения этой темы зависит от того, насколько логично учитель выстраивает систему вопросов и заданий, раскрывающих сущность формируемых понятий, и насколько при этом учитываются индивидуальные особенности ребенка, в том числе и его предшкольная подготовка.

3. Технология изучения чисел в концентрах сотня, тысяча и многозначных чисел

Существующие программы и системы обучения отличаются подходами к изучению данной содержательной линии, последовательностью введения отдельных понятий, системой упражнений, обеспечивающей знакомство с вводимыми понятиями и их осознанное усвоение, используемой терминологией, методами организации познавательной деятельности детей и границей изучаемого отрезка ряда натуральных чисел.

На наш взгляд, изучение данной содержательной линии в каждом из следующих концентров: «Числа от 1 до 100», «Числа от 1 до 1000», «Многозначные числа» полезно рассматривать по следующему плану.

1. Введение новой счетной единицы – десяток (сотня, тысяча), ее название, формы графической модели.

2. Запись новой счетной единицы с помощью цифр 1и 0 (10; 100; 1000), введение понятия «разряд» (класс) и название разряда (класса), уяснение роли цифры, в том числе и цифры «ноль» в записи числа. (Цифра ноль в записи числа сохраняет разряд)

3. Знакомство с разрядными числами, входящими в изучаемый числовой концентр. Их название, запись и последовательность расположения в ряду чисел.

4. Установление взаимно-однозначного соответствия между различными моделями разрядных чисел (вещественной и символической; графической и символической, символической и графической и т.д.), а также разными формами символической записи чисел..

5. Сравнение, сложение и вычитание разрядных чисел (50 > 40; 60 – 20 = 40).

6. Образование двузначного, трехзначного, … многозначного числа путем перехода от вещественной модели к графической и обратно, затем к различным формам символической записи чисел:

– через перечень количества счетных единиц (2с. и 3дес. и еще 1ед. или короче: 2с.3дес.1ед.);

– с помощью суммы разрядных слагаемых (200 + 30 + 1);

– краткой символической записи числа (231).

7. Чтение и запись этих чисел в разрядной таблице и без нее.

8. Сравнение чисел. В каждом из концентров дополнительно к изученным правилам сравнения чисел водятся новые правила. Например, в концентре сотня вводится следующее

правило сравнения двузначных чисел. «Любое однозначное число меньше любого двузначного. Сравнение двузначных чисел начинаем с единиц старшего разряда – разряда десятков. Из двух двухзначных чисел, то больше, в котором больше единиц в разряде десятков. Если число единиц в разряде десятков одинаково, то сравниваем число единиц в следующем меньшем разряде – разряде единиц. То число больше, в котором в разряде единиц будет больше единиц» (85 > 84; 4 < 14).

9. Упражнения на сложение и вычитание, базирующиеся на принципе построения ряда натуральных чисел (230 – 1, 549 + 1, 600 – 1, 599 + 1).

При изучении нумерации чисел в каждом концентре учащиеся знакомятся с характеристикой числа. Характеризуя то или иное натуральное число, дети могут пользоваться следующим планом.

1. Прочитать число 735. (Читаю – семьсот тридцать пять.)
2. Представить число в виде суммы разрядных слагаемых (735 = 700 + 30 + 5).
3. Указать, сколько в нем счетных единиц каждого рода. (В этом числе 7 полных сотен, 75 полных десятков или 735 единиц.)
4. Назвать число единиц в каждом разряде числа. (В этом числе в разряде сотен 7 единиц, в разряде десятков 3 единицы и в разряде единиц 5 единиц.)
5. Назвать непосредственно следующее и непосредственно предшествующее число для данного числа (соседей числа). Для числа 735 непосредственно предыдущим является число 734 и непосредственно следующим – 736.

Рассмотрим подход к изучению нумерации чисел, который нашел отражение в учебниках по математике в УМК «Школа России» [61].

Работа, целью которой является формирование представления о десятичной системе счисления, начинается в концентре «Сотня». Здесь выделяются две ступени: сначала изучается нумерация чисел 11-20, а затем 21-100. Выделение первой ступени (11-20) объясняется тем, что в названии каждого числа второго десятка наблюдается одна закономерность, а в записи другая. Так, называя число, мы произносим сначала количество единиц, а затем десятков. Например: один-на-дцать, три-на-дцать и т.д. Записывая число, сначала пишем цифру 1, обозначающую единицу в разряде десятков, а затем цифру, обозначающую единицы в разряде единиц. В двузначных числах второй ступени сначала называют, начиная слева направо, первое разрядное слагаемое, а затем второе (25 – двадцать пять). В каждой ступени сначала изучается устная нумерация, т.е. дети усваивают названия чисел, а затем письменная.

Изучение устной нумерации чисел второго десятка начинается с формирования у детей представления о новой счетной единице – «десятке». Отсчитывая по десять палочек и завязывая их в пучки, учащиеся узнают, что десять единиц образуют одну единицу следующего разряда – «десяток». Затем, выполняя упражнения в счете десятков палочек, сложении и вычитании десятков с использованием пучков палочек, дети убеждаются, что десятки можно считать, складывать и вычитать, как простые единицы (2дес. +1 дес. = 3 дес.).

Одновременно ведется работа, связанная с усвоением свойств натурального ряда чисел (см. как это сделано в концентре десяток).

При изучении письменной нумерации используют абак – таблицу с двумя рядами карманов: один ряд – для палочек, другой – для разрезных цифр.

Опираясь на наглядные пособия, учащиеся знакомятся со случаями сложения и вычитания вида: 10 + 5, 15 – 5, 15 – 10.

Изучение нумерации чисел 21-100 осуществляется по тому же плану: сначала устная нумерация, затем письменная. Одновременно ведется работа, связанная с усвоением принципа построения натурального ряда чисел и сравнение чисел.

Дальнейшее изучение нумерации продолжается в концентре «Тысяча».

Особенности десятичной системы счисления позволяют младшим школьникам осуществить перенос умения читать и записывать двузначные числа на область трехзначных чисел.

Появление нового разряда – разряда сотен связывается с введением новой счетной единицы – «сотни».

Для этой цели используются те же приемы, которые имели место при разъяснении понятия «десяток», т.е. десять палочек связываются в пучок, получаем десяток. Если же 10 таких пучков объединить вместе, получим сотню (100). Усвоив, что «сотни» пишутся на третьем месте справа, дети сначала учатся называть круглые сотни (сто, двести, триста и т. д.). Затем, ориентируясь на названия разрядов (единицы, десятки и сотни), овладевают умением читать и записывать любое трехзначное число (см. правила чтения и записи трехзначных чисел выше).

В концентре «Многозначные числа» дети учатся читать и записывать четырехзначные, пятизначные и шестизначные числа. В этом концентре вводится понятие «класс».

Для усвоения структуры многозначного числа и терминологии, связанной с названием разрядов и классов, учащиеся упражняются в чтении чисел, записанных в таблице. Эта таблица называется таблицей разрядов и классов. Затем учатся записывать в нее числа, которые диктует учитель (см. правила чтения и записи многозначных чисел выше). Успешно справляясь с такими упражнениями, некоторые дети испытывают трудности при записи и чтении чисел без таблицы разрядов и классов. С одной стороны, это обусловлено терминологией: класс единиц содержит единицы, десятки, сотни; класс тысяч также содержит единицы, десятки, сотни, но это уже единицы тысяч, десятки тысяч, сотни тысяч. С другой стороны, трудность восприятия обусловлена абстрактностью данных понятий, невозможностью использовать для их усвоения предметные действия.

Рассмотрим другой подход к изучению нумерации чисел, который нашел отражение в технологии Н.Б. Истоминой [36].

В связи с тематическим построением курса в нем выделяются не концентры, а темы: «Однозначные числа», «Двузначные числа», «Трехзначные числа», «Четырехзначные числа», «Пятизначные и шестизначные числа», в процессе изучения которых у учащихся формируются сознательные навыки чтения и записи чисел. Выделение тем, названия которых сориентированы на количество знаков в числе, способствует пониманию детьми различий между числом и цифрой

Числительное «десять» (1 десяток) учащиеся используют для счета предметов. Но запись числа 10 вводится только в теме «Двузначные числа».

На первом уроке по этой теме учащимся предлагаются картинки, на которых предметы расположены по десять в каждом ряду, и вопрос: «Можешь ли ты сказать, сколько предметов на каждой картинке?» Большинство детей самостоятельно находят способ действия – счет десятками – и приходят к выводу, что считать десятками можно так же, как единицами: 1 ед., 2 ед., 3 ед., 4 ед., ..., 1 дес., 2 дес., 3 дес., 4 дес. ... .

Пользуясь десятком как счетной единицей, учащиеся легко определяют количество предметов на других картинках: 4 дес. и 3 ед.; 2 дес. и 4 ед.; 8 дес. и 8 ед. Таким образом, работа по усвоению нумерации начинается с осознания того, что двузначное число состоит из десятков и единиц.

В качестве предметной модели десятка используется наглядное пособие в виде треугольника, на котором нарисованы 10 кружков. Каждый кружок является предметной моделью единицы счета.

Увеличь число 30 на 2 дес., на 3 дес., на 5 дес.

Последующая работа, направленная на усвоение десятичной системы счисления и на формирование навыка читать и записывать двузначные числа, связана с установлением соответствия между предметной моделью двузначного числа и его символической записью.

Для формирования умения читать и записывать трехзначные числа детям предлагаются задания:

– на выявление признаков сходства и различия двузначных, трехзначных чисел;
– на запись трехзначных чисел определенными цифрами;
– на классификацию чисел по различным параметрам;
– на выявление правила (закономерности) построения ряда чисел;
– на сравнение чисел;
– на установление соответствия между различными моделями числа.

Перечисленные виды заданий используются и при изучении тем «Четырехзначные числа», «Пятизначные числа» и «Шестизначные числа».

Третий подход к определению числа в чистом виде реализуется в системе обучения Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова [27]. При этом подходе «число» формируется как отношение некоторой величины к своей мерке. Логическое построение учебного материала осуществляется по следующим этапам.

1 этап. Дочисловая деятельность направлена на освоение действия по непосредственному уравниванию непрерывных и дискретных величин (длина, масса, объем).

2 этап. Формируется понятие «число» на основе предметного действия, связанного с поиском кратного отношения величины к своей мерке. Фиксируются эти отношения вначале с помощью предметов, затем произвольно подобранных слов, и только после этого с помощью числительных, а затем и их записей с помощью цифр.

3 этап. На этом этапе идет дальнейшее совершенствование понятия числа, и рассматриваются арифметические действия с числами.

Данный подход «в чистом виде» не нашел широкого распространения в программах по математике в существующих образовательных системах. Он используется как дополнительный к формированию числа, как общего свойства класса непустых эквивалентных между собой множеств (теоретико-множественный подход к определению числа).

Вопросы для самопроверки

1. Раскройте основные положения десятичной системы счисления.

2. Сформулируйте принципы, на которых базируется устная и письменная нумерация натуральных чисел.

3. Какие подходы к определению натурального числа используются в курсе математики начальных классов?

4. Перечислите этапы формирования представления о натуральном числе, используемые в ОС «Школа России».

5. Дайте определение понятию «счет предметов», перечислите правила пересчета предметов, с которыми надо познакомить детей.

6. На какие математические положения могут опираться дети при сравнении однозначных и многозначных чисел?

7. Каковы снования для выделения первого десятка в качестве концентра? Перечислите особенности изучения чисел

первого десятка в традиционном курсе программы обучения математике

8. Каковы основания для выделения такой области чисел как 11-20?

Задания для самоподготовки

1. Раскройте содержание и последовательность изучения основных понятий при изучении темы «Нумерация чисел» в концентрах десяток, сотня, многозначные числа по программе «Школа России» [61]. Определите перечень знаний и умений, которые должны быть сформированы у учащихся при изучении данной темы в перечисленных концентрах.

2. Выполните логико-дидактический анализ материалов учебника «Математика». УМК по выбору студента.

3. При изучении нумерации чисел первого десятка решаются следующие учебные задачи.

- Образование нового числа и обозначение его цифрой.
- Счет предметов множества.
- Написание цифры.
- Определение места числа в натуральном ряду.
- Сравнение предметов и множеств.
- Изучение состава чисел.

Подберите упражнения, с помощью которых реализуются данные учебные задачи, укажите их виды. Укажите универсальные учебные действия, которые формируются при выполнении данных упражнений.

4. Выполните анализ упражнений по теме «Числа от 11 до 20», представленных в учебниках математики для начальных классов.

5. Составьте картотеку статей по теме «Изучение нумерации в начальных классах». Напишите краткую аннотацию к каждой статье.

6. Разработайте содержание контрольной работы для определения уровня усвоения учебного материала по теме «Нумерация чисел». (Выбор числового концентра по желанию студента). Представьте таблицы для обработки результатов контрольной работы.

7. Составьте таблицу разрядов и классов, используемую в начальной школе при изучении нумерации чисел.

8. Приведите примеры заданий из учебников математики на каждый пункт плана, по которому изучается устная и письменная нумерация чисел в каждом числовом концентре.

9. Изучите учебники математики Э.И. Александровой и установите последовательность введения понятия «число» и систему упражнений, которая используется в этих учебниках для введения устной и письменной нумерации чисел.

2.2. Методика формирования смысла арифметических действий

План лекции

1. Теоретические положения, определяющие технологии введения смысла арифметических действий сложения и вычитания
2. Виды практических ситуаций, соответствующих действиям сложения и вычитания
3. Технологии ознакомления детей со смыслом арифметических действий сложения и вычитания
4. Особенности технологий введения арифметического действия умножения
5. Знакомство с действием деления

1. Теоретические положения, определяющие технологии введения смысла арифметических действий сложения и вычитания

В начальной школе изучают четыре арифметических действия: в 1 классе дети знакомятся с действиями первой ступени: сложением и вычитанием, во 2 классе – с действиями второй ступени: умножением и делением.

В математике существует несколько подходов к определению данных действий на множестве целых неотрицательных чисел: теоретико-множественный, аксиоматический и через измерение величин. В существующих образовательных системах для ознакомления детей со смыслом сложения и вычитания используют преимущественно теоретико-множественный подход, поскольку он позволяет представить смысл арифметических действий через предметные ситуации, смысл которых легко воспринимается детьми младшего школьного возраста.

При теоретико-множественном подходе операции сложения и вычитания на множестве целых неотрицательных чисел определяются через операции над множествами и трактуются следующим образом.

Если даны непересекающиеся множества A и B, такие, что $n(A) = a$, $n(B) = b$, то сложением называют операцию по отысканию численности объединения множеств A или B, а значением суммы чисел a и b называют численность объединения данных множеств A и B, т.е.

$$a + b = n(A) + n(B) = n(A \cup B).$$

Если множества A и B, такие, что множество B включается в множество A и $n(A) = a$, $n(B) = b$, то вычитанием называют действие, с помощью которого находят численность дополнения к множеству B до множества A, а значением разности чисел a и

b называют численность этого дополнения или численность разности множеств A и B, т.е.

$a - b = n(A) - n(B) = n(A \setminus B)$, где B включается в A.

2. Виды практических ситуаций, соответствующих действиям сложения и вычитания.

Для осознания смысла арифметических действий, дети должны уметь:

– моделировать практические ситуации, соответствующие действиям сложения и вычитания;

– переводить жизненные ситуации на язык математики и записывать их в виде символической записи;

– читать математические записи разными способами;

– находить значение математических выражений на сложение и вычитание.

Методическая интерпретация теоретико-множественного подхода к изучению данного материала в альтернативных образовательных системах различна и зависит от концепций, положенных в основу каждой технологии, предпочтений автора учебника математики в начальных классах в выборе упражнений для моделирования практических ситуаций, объема вводимых понятий. Все это неизбежно ведет к различиям в системе заданий, с помощью которых учащиеся усваивают смысл арифметических действий, последовательности введения понятий и к различиям в используемых методах обучения.

С теоретико-множественной точки зрения сложению соответствуют следующие предметные действия с совокупностями (множествами, группами предметов):

– объединение элементов двух совокупностей (В коробку положили три цветных карандаша и один простой карандаш. Всего в коробку положили 4 карандаша.);

– увеличение на несколько элементов данной совокупности (Утром на клумбе цвели 5 тюльпанов, к обеду их стало на 2 тюльпана больше, чем утром. Всего на клумбе к обеду цвело 7 тюльпанов);

– увеличение на несколько элементов совокупности, сравниваемой с данной (На одной полке было 6 книг, а на второй на 3 книги больше, чем на первой. На второй полке было 9 книг.).

Вычитанию соответствуют следующие предметные действия с совокупностями (множествами, группами предметов):

– удаление правильной части из данного множества;

– уменьшение на несколько элементов данной совокупности;

– уменьшение на несколько элементов совокупности, сравниваемой с данной;

– разностное сравнение двух совокупностей.

Последовательность изучения должна соответствовать логике математической трактовки понятия, возрастным особенностям детей и осуществляется в следующем порядке.

1. Обучение моделированию всем выше названным ситуациям, сначала на предметных моделях (правильное представление их со слов учителя, показ руками как процесса, так и результата предметного действия), затем словесная их характеристика и изображение на графических моделях.

2. Знакомство со знаками действий и символической записью выражений, составленных с этими знаками действий.

Закрепление этих знаний осуществляется через совокупность заданий следующего характера:

– на соотнесение ситуации и выражения (подбери выражение к данной ситуации или измени ситуацию в соответствии с выражением), ситуация может быть изображена на картинке, нарисована на доске, смоделирована на фланелеграфе, представлена на слайде в виде графической схемы;

– на составление выражений по описанной ситуации (составь выражение, соответствующее ситуации);

– на конструирование (составление) ситуации по заданному выражению.

3. После того, как дети научатся правильно выбирать знак действия в выражении, соответствующем данной ситуации и объяснять выбор действия, переходят к составлению равенства и фиксированию результата действия. Позже дети знакомятся с понятием «математическое выражение» с изучаемым знаком действия и первыми способами чтения этих выражений. Например, в учебниках даются следующие пояснения.

Выражение вида 3 + 5 называют суммой.

Числа 3 и 5 в этой записи называют слагаемыми.

Запись вида 3 + 5 = 8 называют равенством. Число 8 называют значением выражения. Поскольку число 8 в данном случае получено в результате суммирования, его называют значением суммы.

3. Технологии ознакомления детей со смыслом арифметических действий сложения и вычитания

Во всех образовательных технологиях процесс введения соответствует выше представленной последовательности. В то-же время, один учебник отличается от другого.

1. Последовательностью введения арифметических действий.

В учебниках математики М.И. Моро и др., Л.Г. Петерсон, Т.Е. Демидовой, С.А. Козловой, А.П. Тонких и др. действия сложения и вычитания изучаются одновременно. В других учебниках И.И. Аргинской, Н.Б. Истоминой сначала изучается сложение, а затем – вычитание.

2. Содержанием ситуаций, используемых для введения смысла действия и их графическим изображением.

3. Временем, отводимым на изучение данных действий через практические ситуации. В учебниках М.И. Моро и др., Л.Г. Петерсон, Т.Е. Демидовой, С.А. Козловой, А.П. Тонких и др. через два-три урока после рассмотрения смысла арифметических действий сложения или вычитания через практические ситуации, рассматривают задачи, решаемые действиями сложения и вычитания. Это позволяет расширить сферу применения данных арифметических действий. В учебниках Н.Б. Истоминой, понятие «задача» вводится только во втором классе, поэтому достаточно долгое время смысл этих действий рассматривается через практические ситуации. Как объясняет автор данной технологии, такой подход к изучению материала позволяет детально отрабатывать названия компонентов при сложении и вычитании, разные формы моделирования данных ситуаций, вычислительные навыки.

Например, Н.Б. Истомина [36] активно использует задания, требующие распознавания компонентов действий и употребления их названий в речи. С этой целью она предлагает задания следующего типа.

– Среди данных выражений найдите те, в которых первое слагаемое (уменьшаемое, вычитаемое) равно 4:

4 + 2;	7 – 4;	6 + 4;
8 + 1;	4 + 5;	4 – 2;
7 – 4;	4 + 4;	4 – 1.

– Составьте выражение, в котором второе слагаемое (уменьшаемое, вычитаемое) равно двум. Найдите его значение.

– Выберите выражения, в которых значение суммы равно 7. Подчеркните их красным цветом. Выберите выражения, в которых значение разности равно 2. Подчеркните их синим цветом.

– Как называют число 3 в выражении 8 – 3? Как называют число 8? Найдите значение разности. Составьте другой пример, в котором значение разности равно тому же числу.

– Уменьшаемое 8, вычитаемое 3. Найдите значение разности.

– Запишите разность чисел 9 и 7. Назовите уменьшаемое, вычитаемое. Вычислите значение разности.

Следует отметить, что во всех образовательных системах, наряду с теоретико-множественным подходом используется и аксиоматический подход к определению действия вычитания, при котором вычитание трактуется как действие обратное сложению. В этом направлении предлагаются различные методические решения. Так в системе «Школа 2100» уже при введении числа 3 вводятся понятия «Часть и целое». Далее при изучении любого числа в пределах 10 и его состава закрепляются эти понятия. Каждое число рассматривается как целое, которое можно составить из различных частей. Например, 5 = 1 + 4, 5 = 2 + 3 и т.д.

С опорой на предметные модели дети устанавливают связь между действиями сложения и вычитания: 4 + 1 = 5, 5 – 1 = 4, 5 – 4 = 1. В процессе наблюдений за частными случаями дети подводятся к выводу, что при сложении частей получаем целое, если из целого вычесть одну его часть, то получим другую часть целого. Таким образом, вычитание вводится как действие необходимое для нахождения части числа.

4. Особенности технологий введения арифметического действия умножения

В курсе математики действие умножения определяется следующим образом. Если a, b – целые неотрицательные числа, то произведением $a \cdot b$ называется число, удовлетворяющее следующим условиям:

– $a \cdot b = a + a + a + \ldots + a$ (a повторяется b раз), если b больше 1;

– $a \cdot b = a$, если $b = 1$;

– $a \cdot b = 0$, если $b = 0$.

Анализ определения показывает, что осознание смысла умножения предполагает отработку следующих умений.

– Среди выражений, содержащих знак сложения, выделять те, которые содержат одинаковые слагаемые.

– Заменять выражение, содержащее сложение одинаковых слагаемых, выражением, содержащим знак умножения.

– Находить значение простого выражения со знаком умножения через замену его выражением на сложение одинаковых слагаемых.

– Находить результат умножения в том случае, когда один из множителей равен нулю или единице.

Первое умение в различных образовательных технологиях формируется через небольшое число заданий, где требуется составить выражения на сложение одинаковых слагаемых по картинке, либо описать особенность этих выражений словесно, выделив, что в них складывают одинаковые слагаемые, либо произвести классификацию данных выражений, где в одну из групп попадут выражения на сложение одинаковых слагаемых.

На наш взгляд, необходимо расширить число таких упражнений и насытить их информационно. Например, полезно уже на этом этапе задавать вопросы, которые затем лягут в основу замены выражений, содержащих одинаковые слагаемые в выражения со знаком умножения. (Какое слагаемое в выражении повторяется? Сколько раз повторяется слагаемое в сумме?) Кроме того, полезно варьировать сами слагаемые, представлять их либо в виде суммы или разности, либо обозначать буквами. (Например, «(4 + 3) + (4 + 3) + (4 + 3) + (4 + 3)», или «$b + b + b + b + b$»). Наиболее последовательно это умение отрабатывается в учебниках Н.Б. Истоминой.

Прежде чем отрабатывать второе и третье умение детям сообщается ориентировочная основа этого действия. Чаще всего она вводится по соглашению. Детям сообщается, как необходимо осуществлять процесс замены выражений, содержащих одинаковые слагаемые, выражениями со знаком умножения, что при этом обозначает первое и второе число в выражении со знаком умножения, даются первые формулировки чтения таких выражений.

Работая с учебником, дети могут ознакомиться с определением действия умножения. В разных образовательных программах это делается по-разному.

Например, «Умножением называют сложение одинаковых слагаемых» (М.И. Моро и др.).

«Если слагаемые равны между собой, то сложение можно заменить другим действием – умножения» (И.И. Аргинская).

«Если все слагаемые в сумме одинаковые, то действие сложения можно заменить действием умножения» (Т.Е. Демидова и др.).

Заметим, что данные определения способствуют возникновению ошибок такого характера ($2 + 2 + 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2$) – ученик в соответствии с определением заменяет сложение умножением. Корректнее вывод сделать так: «Если все слагаемые в сумме одинаковые, то выражение на сложение одинаковых слагаемых можно заменить простым выражением со знаком умножения, где первое число показывает, какое слагаемое складывали, а второе – сколько раз это слагаемое складывали».

Закрепляется этот материал через совокупность упражнений следующих видов:

– на выделение признаков сходства и различия составных выражений на сложение, где присутствуют и выражения на сложение одинаковых слагаемых;

– на соотнесение рисунка и числового выражения на умножение или сложение одинаковых слагаемых;

– на запись числового выражения под заданным рисунком;

– на выбор числового выражения, соответствующего рисунку;

– на замену произведения суммой одинаковых слагаемых и суммы одинаковых слагаемых произведением;

– на сравнение числовых выражений;

– на чтение простых выражений со знаком умножения разными формулировками;

– вычисление значений выражений на умножение путем преобразования их в составные выражения на сложение одинаковых слагаемых.

Действие умножения может быть введено не только через практическую ситуацию, но и через задачу. В этом случае последовательность действий учителя может быть таковой.

1. Детям предлагается задача с заведомо нелаконичным текстом: «Саша нарисовал сначала 2 шарика, затем еще 2 шарика, потом еще 2 шарика и еще 2 шарика, и еще 2 шарика. Сколько всего шариков нарисовал Саша?»

2. Записывается решение задачи в виде составного выражения, вычислив значение которого можно ответить на вопрос задачи. (2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 (ш.))

3. Проводится беседа о возможности преобразования текста задачи.

– Понравился ли вам текст задачи? – Нет.

– Можно ли его сказать короче? – Да.

4. Преобразуется текст задачи.

– По сколько шариков рисовал Саша каждый раз? – По 2 шарика.

– Сколько раз он нарисовал по 2 шарика? – 5 раз.

– Скажите текст задачи короче.

«Саша нарисовал 5 раз по 2 шарика. Сколько всего шариков нарисовал Саша?»

5. Сообщается, что эту задачу можно решить с помощью нового математического действия – умножения. Записывается выражение со знаком умножения (по 2 шарика взять 5 раз ($2 \cdot 5$)). Устанавливается, что решалась одна и та же задача, но решение записано разными выражениями. В этом случае можно утверждать, что данные выражения равны, т.е. $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 \cdot 5$.

Далее проводится такая же работа, как и в предыдущем случае.

На наш взгляд оба эти подхода должны дополнять друг друга, поскольку отсутствие второго подхода вызывает у детей затруднения в установлении особенностей задач на нахождение значения произведения и в выборе действия при решении таких задач.

Умножение с нулем и единицей рассматривается в виде четырех постулатов (правил, которые необходимо запомнить): $1 \cdot a = a$; $0 \cdot a = 0$, затем, $a \cdot 1 = a$ и $a \cdot 0 = 0$. Первые два из них выводятся через практическую ситуацию или через выражение на сложение одинаковых слагаемых (в первом случае слагаемым будет 1, во втором, число 0) с опорой на смысл действия умножения. Например, детям предлагается выражение $1 + 1 + 1 + 1$ (для нуля: $0 + 0 + 0 + 0$). Поскольку складывают одинаковые слагаемые, то это выражение заменяют простым выражением на умножение: $1 + 1 + 1 + 1 = 1 \cdot 4$ ($0 + 0 + 0 + 0 = 0 \cdot 4$). Выполнив несколько таких заданий, дети подводятся к выводу: $1 \cdot a = a$, соответственно $0 \cdot a = 0$. Значения двух вторых выражений получают из первых, применив переместительное свойство произведения: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, соответственно: $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

5. Знакомство с действием деления

Как мы уже подчеркивали, методика ознакомления со смыслом математических действий базируется или полностью опирается на трактовки данных действий в математике.

В математике существует несколько подходов к определению действия деления. В начальных классах действие деления вводится, т.е. осуществляется первое знакомство с этим действием, с опорой на теоретико-множественный смысл этого действия, а затем дается и определение деления, соответствующее аксиоматическому способу построения арифметики натуральных чисел.

С теоретико-множественной точки зрения действие деления связано с разбиением конечного множества на равночисленные попарно непересекающиеся подмножества, и с его помощью решаются задачи двух видов: на отыскание числа элементов в каждом подмножестве разбиения (задача на деление на части) и на отыскание числа таких подмножеств (задача на деление по содержанию).

– Если $a = n(A)$ и множество A разбито на попарно непересекающиеся подмножества и если:

b – число элементов в каждом подмножестве, то частное $a : b$ – это число таких подмножеств;

b – число подмножеств, то частное $a : b$ – это число элементов в каждом подмножестве.

При аксиоматическом построении теории натуральных чисел деление определяется как операция, обратная умножению.

– Делением натуральных чисел a и b называется операция, удовлетворяющая условию: $a : b = c$ тогда и только тогда, когда $b \cdot c = a$, где $a : b$ называется частным чисел a и b, число a – делимым, число b – делителем.

В начальных классах сохраняются оба подхода к определению данного действия, поскольку первый подход необходим для решения задач, т.е. он связан со смысловой частью текста задачи и помогает правильно выбрать и обосновать выбор действия, с помощью которого решается соответствующая задача. Второй подход необходим для вычисления значений выражений, в которых не ясно делят ли множество на части или по содержанию. В этом случае достаточно знать, что для нахождения значения выражения $12 : 2$, достаточно подобрать такое число, которое при умножении на 2 даст нам число 12, это будет число 6, т.к. $6 \cdot 2 = 12$.

Во всех образовательных системах вначале дети знакомятся с теоретико-множественным подходом к действию деления, а затем с аксиоматическим.

Знакомство с теоретико-множественным смыслом действия деления может осуществляться двумя способами:

– через решение задач;

– через установление соответствия между предметными моделями и символическими записями.

Рассмотрим последовательность педагогических действий при первом способе (И.И. Аргинская).

При первом подходе последовательность педагогических действий может быть такова.

1. Дается задача на умножение. Сюжет задачи иллюстрируется на предметной модели. Записывается решение задачи.

2. Составляется задача, обратная данной задаче на деление на части. Используя иллюстрацию к первой задаче, дети находят ответ на вопрос второй задачи, опираясь на предметную

модель. Затем, используя прием показа, детям сообщают, что решение такой задачи можно записать с помощью нового действия – деления. Дается образец записи и пояснения к нему, делается вывод, что задачи такого вида решают с помощью действия деления.

Задачу на деление по содержанию вводят по такому же плану, но в различных технологиях это делают в разное время. В учебнике И.И. Аргинской задачу на деление по содержанию вводят, как задачу обратную к задаче на деление на части и делают это примерно через 2 месяца после знакомства с задачей на деление на части (И.И. Аргинская).

Авторы учебника математики Т.Е. Демидова и др. («Школа 2100») одновременно вводят задачу на деление по содержанию и задачу на деление на части, сравнивают эти задачи, находят общее и различное (в первой задаче делят поровну по 2 яблока, а во второй делят тоже поровну на 5 равных частей). При этом название задач «деление по содержанию» и «деление на части» не сообщается.

В образовательной программе «Школа России» порядок введения этой темы такой же, как в системе «Школа 2100», но большое внимание уделяется практическим операциям с предметами, сообщают и название этих задач.

Второй подход – аксиоматический также осуществляется двумя способами:

– через изучение связи между компонентами и результатом действия умножения;

– через введение понятия «обратная операция», с помощью которого устанавливается взаимосвязь между действиями умножения и деления.

Первый способ используется в технологии «Школа России». Для того, чтобы дети могли находить результаты деления на основе знания соответствующих случаев умножения, необходимо ознакомить их со связью между произведением и множителями. С этой целью можно предложить детям рассмотреть тройку взаимосвязанных равенств: $4 \cdot 2 = 8$, $8 : 4 = 2$, $8 : 2 = 4$. Вспомнив названия чисел при умножении, дети читают равенства с действием деления, используя терминологию действия умножения: значение произведения 8 делим на первый множитель 4, получаем второй множитель 2 (аналогично читают второе равенство). На основе этих частных выводов ученики делают общий вывод своими словами или читают его по учебнику.

Далее авторы подчеркивают, что в дальнейшем важно, чтобы при выполнении аналогичных упражнений, дети не только находили результат, но и производили пояснения: «Значение произведения чисел 4 и 3 равно 12; делю значение произведения 12 на первый множитель 4, получаю второй множитель 3; делю значение произведения 12 на второй множитель 3, получаю первый множитель 4».

Анализируя такое пояснение, видим, что для детей остается неясным, как находить результаты деления на основе знания соответствующих случаев умножения, если у нас нет рядом выражения на умножение. Разумеется, тут требуются дополнительные пояснения учителя.

Второй способ наиболее последовательно и информационно насыщенно дается в учебниках Л.Г. Петерсон. В данной программе на одном уроке (2 класс) дети знакомятся с несколькими подходами к трактовке действия деления. Поскольку дети уже знакомы с понятиями «операция» и «обратная операция» (начало 2 класса), то для ознакомления детей с действием деления сначала используется аксиоматический подход к определению данного действия. После установления взаимосвязи между делением и умножением, которую они наблюдают, выполняя практические ситуации, дети знакомятся с выводом, данным в учебнике.

Операция деления является обратной для операции умножения.

Чтобы разделить число a на число b надо подобрать такое число c, которое при умножении на b дает a или $a : b = c$, следовательно, $c \cdot b = a$. Верно и обратное утверждение.

После чего вводятся задачи на деление на части и по содержанию.

Случаи деления вида $a : a = 1$ и $a : 1 = a$ выводятся с опорой на взаимосвязь между действиями умножения и деления, впоследствии запоминаются. Деление вида $a : 0$ дается в виде постулата, который необходимо запомнить: «Делить на нуль нельзя».

Вопросы для самопроверки

1. Какие математические положения можно использовать при введении смысла действий сложения и вычитания?
2. Приведите примеры заданий, направленных на формирование смысла арифметических действий сложения и вычитания.
3. Какие обоснования может дать ученик, вычисляя значение выражений 5 – 2 и 6 : 2?
4. Какие предметные ситуации можно использовать при формировании смысла действия деления?
5. Приведите примеры заданий, направленных на формирование смысла арифметического действия умножения.
6. Какие ошибки может допустить ученик, выполняя задание: «замени там, где можно, сложение умножением: 3 + 3 + 3 + 3 + 3; 2 + 2 + 3 + 5; 4 + 4 + 4»?

Задания для самоподготовки

1. Выберите две образовательные системы обучения и из учебников по математике выпишите упражнения, направленные на формирование смысла арифметического действия сложения

(вычитания, умножения, деления). Сравните их, выделив критерии для сравнения.

2. Какой подход к определению действий вычитания и деления используется в различных образовательных системах?

3. Приведите пример рассуждений ученика при выполнении заданий:

Докажите, что	$6 : 2 = 3$;	$5 - 3 = 2$;
	$8 \cdot 1 = 8$;	$8 + 1 = 9$.

4. По учебникам математики для начальных классов изучите последовательность рассмотрения арифметических действий по классам. Установите, какие подходы к определению числа используются. Какие типы заданий для раскрытия смысла действий предлагаются в учебниках?

5. Какие наглядные средства используются в учебниках для раскрытия смысла действий?

6. Составьте фрагмент урока по теме «Сложение и вычитание в пределах 10».

2.3. Выражения и их виды в курсе математики начальной школы

План лекции

1. Понятие о выражении и вычислительном упражнении
2. Способы чтения выражений и вычислительных упражнений
3. Приемы отработки умения правильно читать выражения и вычислительные упражнения разными формулировками
4. Составные выражения и технология знакомства с составным выражением
5. Порядок выполнения действий в выражениях

1. Понятие о выражении и вычислительном упражнении

Выражением называют математическую запись, состоящую из чисел, обозначенных буквами или цифрами, соединенных знаками арифметических действий. Отдельно взятое число есть также выражение. Выражение, в котором все числа обозначены цифрами, называют числовым выражением.

Если в числовом выражении выполнить указанные действия, то получим число, которое называют значением выражения.

Выражения можно классифицировать по числу арифметических действий, которые используются при записи выражений и по способу обозначения чисел. По первому основанию выражения разбиваются на группы: элементарных (не содержащих знака арифметического действия), простых (один знак арифметического действия) и составных (более одного знака арифметических действий) выражений. По второму основанию различают числовые (числа записаны цифрами) и буквенные (хотя бы одно число или все числа обозначены буквами) выражения.

Математическую запись, которую в математике принято называть выражением, необходимо отличать от других видов записей.

Примером или вычислительным упражнением называют запись выражения вместе с требованием к его вычислению.

15 + 3 – выражение, 18 – его значение;

15 + 3 = – вычислительное упражнение (пример),

18 – результат вычислительного упражнения (примера).

2. Способы чтения выражений и вычислительных упражнений

В зависимости от знака арифметического действия, который используется в записи простого выражения, простые выражения разбивают на группы выражений со знаком «+,», «–», «·», «:». Эти выражения имеют особые названия:

2 + 3 – сумма;

7 – 4 – разность;

7 · 2 – произведение;

6 : 3 – частное.

Перечислим общепринятые способы чтения выражений, с которыми знакомятся учащиеся начальной школы.

Способы чтения выражений со знаком «+»:

25 + 17 – 25 плюс 17;

25 + 17 – к 25-ти прибавить 17;

25 + 17 – 25 да 17;

25 + 17 – 25 и еще 17;

25 + 17 – сумма чисел двадцать пять и семнадцать (сумма 25-ти и 17-ти);

25 + 17 – 25 увеличить на 17;

25 + 17 – 1-ое слагаемое 25, 2-ое слагаемое 17.

С записью и чтением простых выражений дети знакомятся по мере того, как вводится соответствующее математическое действие. Например, знакомство с действием сложения сопровождается записью выражения на сложение 2 + 1, здесь же даются образцы первых форм чтения этих выражений: «к двум прибавить один», «два и один», «два да один», «два плюс один». Другие формулировки вводятся по мере знакомства детей с соответствующими понятиями. Изучая название компонентов действий и их результатов, дети учатся читать выражение, используя эти названия (первое слагаемое 25, второе 17 или сумма 25-

ти и 17-ти). Знакомство с понятиями «увеличить на …», «уменьшить на ...» позволяет ввести новую формулировку для чтения выражений на сложение и вычитание с этими терминами «двадцать пять увеличить на семнадцать», «двадцать пять уменьшить на семнадцать». Так же поступают с остальными видами простых выражений.

С понятиями «выражение», «значение выражения» в ряде образовательных систем («Школа России» и «Гармония») дети знакомятся несколько позже, чем научатся их записывать, вычислять и читать не всеми, но многими формулировками. В других программах и системах обучения (система Л.В. Занкова, «Школа 2100») эти математические записи сразу называют выражениями и используют это слово в вычислительных заданиях.

Обучая детей читать выражения различными формулировками, мы вводим их в мир математических терминов, даем возможность познать математический язык, отрабатываем смысл математических отношений, что, несомненно, повышает математическую культуру ученика, способствует осознанному усвоению многих математических понятий.

3. Приемы отработки умения правильно читать выражения и вычислительные упражнения разными формулировками

Прием «делай как я». Правильная речь учителя, за которым дети повторяют формулировки, – основа грамотной математической речи школьников. Значительный эффект дает использование приема сравнения формулировок, которые произносят дети, с заданным образцом. Полезно использовать прием, когда учитель специально допускает речевые ошибки, а дети его исправляют.

Дать несколько выражений и предложить прочитать эти выражения разными способами. Один ученик читает выражение, а другие проверяют. Полезно давать столько выражений, сколько формулировок знают дети к этому времени.

Учитель диктует выражения разными способами, а дети записывают сами выражения, не вычисляя их значения. Такие задания направлены на то, чтобы проверить знание детьми математической терминологии, а именно: умение записывать выражения или вычислительные упражнения, прочтенные разными математическими формулировками.

Если ставится задача, предусматривающая проверку сформированности вычислительного навыка, полезно читать выражения или вычислительные упражнения только теми формулировками, которые хорошо усвоены, не заботясь об их разнообразии, а детям предложить записывать только результаты вычислений, сами выражения можно не записывать.

4. Составные выражения и технология знакомства с составным выражением

Выражение, состоящее из нескольких простых, называют составным.

Следовательно, существенным признаком составного выражения является его составленность из простых выражений. Знакомство с составным выражением можно осуществить по следующему плану.

Дать простое выражение и вычислить его значение ($7 + 2 = 9$), назвать его первым или данным.

Составить второе выражение так, чтобы значение первого стало компонентом второго ($9 - 3$), назвать это выражение продолжением для первого. Вычислить значение второго выражения ($9 - 3 = 6$).

Проиллюстрировать процесс слияния первого и второго выражений, опираясь на пособие.

Пособие представляет собой прямоугольный лист бумаги, который разделен на 5 частей и сложен в виде гармошки. На каждой части пособия имеются определенные записи (Рис. 1).

7 + 2	**=**	**9**	**- 3**	**= 6**

Рис. 1

Скрывая вторую и третью части данного пособия (из первого выражения скрываем требование к его вычислению и его значение, а во втором скрываем ответ на вопрос первого), получаем составное выражение и его значение ($7 + 2 - 3 = 6$). Даем ему название – составное (составлено из других).

Иллюстрируем процесс слияния других пар выражений или вычислительных упражнений, подчеркивая:

– объединить в составное можно лишь такую пару выражений, когда значение одного из них является компонентом другого;

– значение выражения-продолжения совпадает со значением составного выражения.

Закрепляя понятие составного выражения полезно выполнять задания двух видов.

1 вид. Дана совокупность простых выражений, необходимо выделить из них пары, для которых верно отношение «значение одного из них является компонентом другого». Составить из каждой пары простых выражений одно составное выражение.

2 вид. Дано составное выражение. Необходимо записать простые выражения, из которых оно составлено.

Например, выражение $8 - 3 + 5$ состоит из простых выражений $8 - 3$ и $5 + 5$; а составное выражение $14 - 2 \cdot 3$ состоит из выражений $2 \cdot 3$ и $14 - 6$.

Описанный прием полезно использовать по нескольким причинам:

– по аналогии можно ввести понятие составной задачи;

– ярче выделяется существенный признак составного выражения – его составленность из простых выражений;

– предупреждаются ошибки при вычислении значений составных выражений;

– данный прием позволяет проиллюстрировать роль скобок в составных выражениях.

Составные выражения, содержащие знаки «+», «–» и скобки, изучаются с первого класса. В некоторых системах обучения («Школа России», «Гармония», «Школа 2000») не предусматривается изучение скобок в первом классе. Их вводят во втором классе при изучении свойств арифметических действий (сочетательное свойство суммы). Скобки вводятся как знаки, с помощью которых в математике можно показать порядок выполнения действий в выражениях, содержащих более одного действия. В дальнейшем дети знакомятся с составными выражениями, содержащими действия первой и второй ступеней со скобками и без них. Изучение составных выражений сопровождается изучением правил порядка действий в этих выражениях и способов чтения составных выражений.

Значительное внимание во всех программах уделяется преобразованию выражений, которые осуществляются на основании сочетательного свойства суммы и произведения, правил вычитания числа из суммы и суммы из числа, умножения суммы на число и деления суммы на число. На наш взгляд, в отдельных программах недостаточно упражнений, направленных на формирование умения читать составные выражения, что, естественно, позже сказывается на умении решать уравнения с опорой на зависимость между компонентами и результатом действия.

Выражения, в которых одно число или все числа обозначены буквами, называют буквенными ($a + 6$; $(a + b) \cdot c$ – буквенные выражения). Пропедевтикой к введению буквенных выражений являются выражения, где одно из чисел заменяется точками или пустым квадратом. Называют эту запись выражением «с окошком» ($\square + 4$ – выражение с окошком).

Типичными заданиями, содержащими буквенные выражения, являются задания на нахождение значений выражений при условии, что буква принимает различные значения из заданного перечня значений. (Вычисли значения выражений $a + b$ и $a - b$, если: $a = 42$, $b = 90$ или $a = 100$, $b = 230$). В таких заданиях для вычисления значений буквенных выражений заданные значения переменных поочередно подставляют в выражения и далее работают как с числовыми выражениями.

Буквенные выражения могут использоваться для введения обобщенных записей свойств арифметических действий ($a + b = b + a$), формируют представления о возможности переменных значений компонентов действий и тем самым позволяют подвести детей к центральному математическому понятию «переменная величина». Кроме того, с помощью буквенных выражений дети осознают свойства существования значений суммы, разности, произведения, частного на множестве целых неотрицательных чисел. Так, в выражении $a + b$ при любых значениях переменных a и b можно вычислить значение суммы, а значение выражения $a - b$ на указанном множестве можно вычислить только в том случае, если b меньше или равно a. Анализируя задания, направленные на установление возможных ограничений для значений a и b в выражениях $a \cdot b$ и $a : b$, дети устанавливают свойства существования значения произведения и значения частного в адаптированном к возрасту виде.

Буквенная символика используется в качестве средства обобщения знаний и представлений детей о количественных характеристиках объектов окружающего мира и о свойствах арифметических действий. Обобщающая роль буквенной символики делает ее очень сильным аппаратом для формирования обобщенных представлений и способов действий с математическим содержанием, что, несомненно, повышает возможности математики в развитии и формировании абстрактных форм мышления.

Следует заметить, что в современных учебниках наблюдается тенденция к введению материала на понятийном уровне. Например, каждому из выше названных понятий дается развернутое определение, отражающее его существенные признаки. Однако не все встречающиеся определения отвечают требованиям принципа научности. Например, понятие «выражение» в одном из учебников математики для начальных классов трактуется так: «Математическая запись из арифметических действий, не содержащая знаков больше, меньше или равно называется выражением» (Л.Г. Петерсон) Заметим, что в данном случае определение составлено неверно, так как в нем описано то, чего в записи нет, но неизвестно, что там есть. Это довольно типичная неточность, которую допускают в определении.

5. Порядок выполнения действий при нахождении значения выражения

В курсе математики начальных классов значительное внимание уделяется изучению порядка действий при нахождении значения составных выражений.

Наши наблюдения и анализ ученических работ показывает, что изучение данной содержательной линии сопровождается следующими видами ошибок школьников:

– не могут правильно применить правило порядка действий;

– неверно отбирают числа для выполнения действия.

Например, при нахождении значения выражения 62 + 30 : (18 – 3) выполняют действия в следующем порядке:

62 + 30 = 92	или так:	18 – 3 = 15
18 – 3 = 15		30 : 15 = 2
30 : 15 = 2		62 + 30 = 92
92 + 2 = 94		

Опираясь на данные о типичных ошибках, возникающих у школьников можно выделить два основных действия, которые следует формировать в процессе изучения данной содержательной линии:

1) действие по определению порядка выполнения арифметических действий при нахождении значения числового выражения;

2) действие по отбору чисел для вычисления значений промежуточных математических действий.

В курсе математики начальных классов традиционно правила порядка действий формулируются в следующем виде.

Правило 1. В выражениях без скобок, содержащих только сложение и вычитание или умножение и деление, действия выполняются в том порядке, как они записаны: слева направо.

Правило 2. В выражениях без скобок сначала выполняются по порядку слева направо умножение или деление, а потом сложение или вычитание.

Правило 3. В выражениях со скобками сначала вычисляют значение выражений в скобках. Затем по порядку слева направо выполняются умножение или деление, а потом сложение или вычитание.

Каждое из данных правил ориентировано на определенный вид выражений:

– выражения без скобок, содержащие только действия одной ступени;

– выражения без скобок, содержащие действия первой и второй ступени;

– выражения со скобками, содержащие действия, как первой, так и второй ступени.

При такой логике введения правил и последовательности их изучения вышеназванные действия будут состоять из ниже перечисленных операций, овладение которыми и обеспечивает усвоение данного материала:

– распознать структуру выражения и назвать, к какому типу оно относится;

– соотнести данное выражение с правилом, которым надо руководствоваться при вычислении его значения;

– установить порядок действий в соответствии с правилом;

– правильно отобрать числа для выполнения очередного действия;

– выполнить вычисления.

Данные правила вводятся в третьем классе как обобщение для определения порядка действий в выражениях различной структуры. Нужно заметить, что до знакомства с этими правилами дети уже встречались с выражениями со скобками. В первом и втором классах при изучении свойств арифметических действий (сочетательное свойство сложения, распределительное свойство умножения и деления), умеют вычислять значения выражений, содержащих действия одной ступени, т.е. им знакомо правило № 1. Поскольку вводится три правила, отражающие порядок действий в выражениях трех видов, то необходимо, прежде всего, научить детей выделять различные выражения с точки зрения тех признаков, на которые ориентировано каждое правило.

В образовательной системе «Гармония» [36] основную роль в изучении этой темы играет система целесообразно подобранных упражнений, через выполнение которых дети усваивают общий способ определения порядка действий в выражениях разной структуры. Нужно заметить, что автор программы по математике в данной системе очень логично выстраивает методику введения правил порядка действий, последовательно предлагает детям упражнения для отработки операций, входящих в состав вышеназванных действий. Чаще всего встречаются задания следующих типов:

– на сравнение выражений и последующее выявление в них признаков сходства и различия (признак сходства отражает тип выражения, с точки зрения его ориентации на правило);
– на классификацию выражений по заданному признаку;
– на выбор выражений с заданными характеристиками;
– на конструирование выражений по заданному правилу (условию);
– на применение правила в различных моделях выражений (символической, схематической, графической);
– на составление плана или блок-схемы порядка выполнения действий;
– на постановку скобок в выражении при заданном его значении;
– на определение порядка действий в выражении при вычисленном его значении.

В настоящее время используется и другая технология изучения порядка действий при нахождении значения составных выражений. При этом подходе основное внимание уделяется пониманию учащимися структуры выражения. Важнейшим учебным действием при этом является выделение в составном выражении нескольких частей (разбиение выражения на части). В процессе вычисления значений составных выражений учащиеся пользуются *рабочими правилами*.

1. Если выражение содержит скобки, то его разбивают на части так, чтобы одна часть с другой были соединены действиями первой ступени (знаками «плюс» и «минус»), не заключенными в скобки, находят значение каждой части, а затем действия первой ступени выполняют по порядку – слева направо.

2. Если в выражении нет действий первой ступени, не заключенных в скобки, но есть действия умножения и деления, не заключенные в скобки, то выражение разбивают на части, ориентируясь на эти знаки.

Эти правила позволяют производить вычисление значений выражений, содержащих большое число арифметических действий.

Рассмотрим пример.

$3 \cdot 40 - 20 \cdot (60 - 55) + 81 : (36 : 4)$

Знаками плюс и минус, не заключенными в скобки, разобьем выражение на части: от начала до первого знака (минус), не заключенного в скобки, затем от этого знака до следующего (плюс) и от знака плюс до конца.

$$\underbrace{3 \cdot 40}_{} - \underbrace{20 \cdot (60 - 55)}_{} + \underbrace{81 : (36 : 4)}_{}$$

Получилось три части:

1 часть – $3 \cdot 40$;

2 часть – $20 \cdot (60 - 55)$;

и 3 часть – $81 : (36 : 4)$.

Находим значение каждой части:

1) $3 \cdot 40 = \underline{120}$	2) $60 - 55 = 5$	3) $36 : 4 = 9$
	$20 \cdot 5 = \underline{100}$	$81 : 9 = \underline{9}$
4) $120 - 100 = 20$	$20 + 9 = 29$	

Ответ: значение выражения 29.

Вторая технология позволяет давать детям выражения, содержащие много действий. Опыт показывает, что данная технология легко усваивается детьми, и они с удовольствием выполняют вычислительные упражнения с множеством действий. Более того такие задания можно использовать для организации коллективной работы в группах. Дети разбивают большое выражение на части, распределяют части между членами группы и каждый вычисляет свою часть. Затем, координатор в группе собирает ответы отдельных частей, выполняет заключительные действия и представляет окончательный результат вычисления значения выражения. В этом случае конечный результат зависит от результатов, которые получены каждым членом группы, т.е. работа носит истинно коллективный характер.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определения понятий «выражение» и «вычислительное упражнение».
2. Какие группы выражений можно выделить?
3. Сформулируйте определения понятия «составное выражение», которые используются в курсе математики начальных классов.
4. Как можно проверить умение детей читать выражения разными способами?
5. Перечислите типы ошибок, которые допускают дети при использовании правил порядка действий. Как их можно предупредить?

Задания для самоподготовки

1. Какие виды наглядности (предметной, графической, схематической) целесообразно использовать при введении понятия «выражение»?

2. Составьте выражения из чисел 25 и 5. Какие выражения можно записать, используя два числа. Прочитайте эти выражения разными формулировками.

3. Выполните классификацию следующих выражений, укажите основание классификации и вид полученной группы выражений:

$24 + 6$,	$3 \cdot (15 - 5)$,	$a : 8$,
$28 - (4 : 2)$,	$12 \cdot 3$,	6,
$x + 5$,	$14 - 7$,	$26 - 6$ □ 2,
$a + 2 \cdot 3$,	$18 : 9$,	$b : 6$,
$15 : b$,	$38 - (15 \cdot b)$.	

Прочитайте составные выражения разными формулировками.

4. Рассмотрите подходы введению буквенных выражений в различных учебниках по математике для начальных классов. Какому из них вы отдадите предпочтение? Почему? Какие методы и приемы обучения использованы при ознакомлении учащихся с буквенными выражениями?

5. Сформулируйте все возможные способы чтения вычислительных упражнений вида

$12 - 3 =$; $12 \cdot 3 =$; $12 : 3 =$.

6. Назовите данное выражение и выражение-продолжение в следующих составных выражениях:

$18 : 3 \cdot 5$; $24 - 48 : 3$; $29 - (14 + 7)$.

7. Среди предложенных выражений найдите выражения-продолжения для выражения $18 - 3$:

$3 \cdot 5$; $15 + 18$; $15 : 3$; $3 \cdot 9$.

8. Выделите выражения, из которых составлены следующие выражения: $8 + 3 - 6$; $9 - (5 - 3)$; $2 \cdot 7 - 5$.

Глава 3. Задачи в обучении математике в начальных классах

Что б задачу победить
Ее надо полюбить,
Рассмотреть, полюбоваться,
Изучить, повосхищаться.
(Анатолий Гин)

3.1. Задачи: определение, структура, классификация

План лекции

1. Определение, функции и структура текстовых задач
2. Классификация простых задач
3. Этапы обучения решению простых задач
4. Технология обучения решению задач Е.М. Семенова

1. Определение, функции и структура текстовых задач

В психолого-педагогической науке под задачей понимают известную цель, достижение которой возможно с помощью выполнения определенных действий, выбор которых зависит от ситуации, где эта цель задана.

В начальном курсе математики понятие «задача» обычно используется тогда, когда речь идет о текстовых арифметических задачах. Они формулируются в виде текста, в котором находят отражение количественные отношения между реальными объектами. В методике используются различные трактовки понятия текстовая арифметическая задача.

Под арифметической задачей понимается требование в определении числового значения искомой величины по известным числовым значениям других величин и зависимостям, выраженным в словесной форме, которые связывают все известные и неизвестные величины между собой.

Может иметь место и другая трактовка данного понятия.

Математическая текстовая задача – это связный лаконический рассказ, в котором введены значения некоторых величин и предлагается отыскать другие неизвестные значения величин, зависимые от данных и связанные с ними определенными отношениями, указанными в условии.

В математике задачи выполняют обучающую, развивающую и воспитательную функции.

Обучающая функция задач очевидна. С помощью задач раскрывается целый ряд математических понятий, таких как: свойства арифметических действий, связь между компонентами и результатом действия, связь между величинами. Например, для изучения сочетательного свойства сложения ($(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$) используют целесообразно подобранную задачу. Решая ее разными способами, сравнивая полученные в результате решения различными способами выражения, получают равенство, отражающее сочетательное свойство сложения. Задача является средством применения полученных знаний. Через задачи дети знакомятся с математической символикой.

Воспитательная функция реализуется через текстовое содержание задачи (фабулу). Но педагогу следует знать, что воспитывает не столько содержание задач, сколько процесс ее решения. Правильно организованное решение задачи, заинтересованность и активность обучающихся в процессе работы над задачей повышает интерес к предмету, воспитывает внимательность, аккуратность, усидчивость, настойчивость. Процесс решения задачи формирует многие универсальные учебные действия.

Развивающая функция задач направлена на овладение универсальными логическими приемами мышления, способствует усвоению общего приема решения задач, математической терминологии, учит рассуждениям, лаконичности в изложении мыслей, приучает к полноценной аргументации выполняемых действий.

Различают элементарные, простые и составные арифметические задачи. Под элементарной задачей понимают логическую задачу, ответ на вопрос которой можно дать, не выполняя арифметического действия. Ответ, чаще всего, скрыт в самом тексте задачи. Например, «Тройка лошадей пробежала 15 км. Сколько км пробежала каждая лошадь?».

Задачу, содержащую два известных числа и одно число неизвестное, называют простой. Задачу, состоящую из нескольких простых, называют составной.

Текст задачи рассматривают как словесную модель реальной действительности. В структуре текста задачи выделяются: условие (часть текста, в которой описывается заданная ситуация, числовые данные этой ситуации и связи между ними) и вопрос (часть текста, в которой описывается требование найти неизвестную (искомую) величину).

Итак, любая текстовая задача состоит из двух частей: условия и требования (вопроса). Подчеркнем, что текстовая математическая задача – это единство условия и цели (вопроса, требования). Если нет одного из этих компонентов, то нет и задачи. Это очень важно иметь в виду, поскольку анализ текста задачи следует проводить с соблюдением такого единства. Это означает, что анализ условия задачи необходимо соотносить с вопросом задачи и, наоборот, вопрос задачи анализировать, соотнося его с условием. Их нельзя разрывать, так как они составляют одно целое.

Решить математическую задачу – это значит найти такую последовательность общих положений математики, применяя которые к условиям задачи получаем то, что требуется найти –

ответ. Следует иметь в виду, что понятие «решение задачи» можно рассматривать с различных точек зрения: решение как результат, т.е. как ответ на вопрос, поставленный в задаче, и решение как процесс нахождения этого результата.

Различают разнообразные конструкции (К – конструкция) текста задачи.

К-1. В начале текста дано условие, которое выражено повествовательными предложениями, а затем следует требование, выраженное вопросительным предложением. (В гараже стояло 4 машины. По вызову из гаража выехало 3 машины. Сколько машин осталось стоять в гараже?)

К-2. Часть условия представлена повествовательным предложением в начале текста, а затем идет вопросительное предложение, содержащее вопрос и другую часть условия. (В гараже стояло 4 машины. Сколько машин осталось в гараже, если из гаража уехало 3 машины?)

К-3. Разновидность предыдущей конструкции. Часть условия представлена повествовательным предложением в начале текста. Затем дано второе повествовательное предложение, содержащее требование и еще часть условия. (В гараже стояло 4 машины. Найдите количество машин, оставшихся в гараже, после того, как 3 машины уехало.)

К-4. Текст задачи представляет собой одно вопросительное предложение, в котором сначала идет вопрос, а затем условие (Сколько машин осталось в гараже после того, как 3 из 4 машин уехали?)

В трансформированных формулировках условие и требование не имеют определенного места в структуре задачи. Численные компоненты могут быть записаны не с помощью чисел, а словами.

Задача: Найти скорость катера, который за три часа удалился от пристани по течению на 120 км. Скорость течения реки пять километров в час.

Детям необходимо предлагать такую систему текстов задач, в которой стандартные тексты перемежаются с трансформированными.

В реальной жизни довольно часто возникают самые разнообразные задачные ситуации. Сформулированные на их основе задачи могут содержать избыточную информацию, то есть, такую, которая не нужна для выполнения требования задачи. Такие задачи называют задачами с избыточными данными.

На основе возникающих в жизни задачных ситуаций могут быть сформулированы задачи, в которых недостаточно информации для выполнения требования. Так в задаче: «Найти длину и ширину участка прямоугольной формы, если известно, что длина больше ширины на 3 метра» – недостаточно данных для ответа на её вопрос. Чтобы выполнить эту задачу, необходимо её дополнить недостающими данными. Такого рода задачи называют задачами с недостающими данными.

Вопрос о роли задач в курсе математики начальной школы является дискуссионным. С одной стороны обучение решению задач рассматривается как цель обучения (ребенок должен научиться решать задачи), а с другой стороны – процесс обучения решению задач рассматривается как один из способов математического, а в целом, интеллектуального развития ребенка.

Цель первого подхода, который получил название частного, – научить ребенка решать текстовые арифметические задачи. Поскольку научить решать всевозможные задачи невозможно, то были выделены группы типовых задач, решению которых и обучали школьников. Сторонники этой точки зрения придерживаются четкой иерархии в построении системы обучения решению задач:

– постепенно наращивали сложность задач (первоначально рассматриваются простые задачи разных видов, затем составные в два действия, а затем – типовые составные задачи с большим числом действий);

– четко разграничивались виды задач с целью прочного усвоения учащимися механизма решения задач этих видов.

Для развития у детей умения решать задачи определенных видов учащиеся усваивали сведения о видах простых задач, способах выбора действия, с помощью которого решается задача данного вида, овладевали умением выделять задачи соответствующих видов и применять эти умения к решению конкретной задачи.

Для реализации этого подхода в 60-ых годах прошлого столетия М.А. Бантовой [10] и другими методистами были разработаны классификации простых задач. Для развития у учащихся умения решать задачи определенных видов необходимо было, чтобы дети усвоили сведения о видах задач, способах решения задач каждого вида, усвоили способ выделять задачи соответствующих видов, научились выбирать способы решения, адекватные виду задачи, и применять эти способы к решению конкретных задач.

С.Е. Царева [98] отмечает, что умение решать задачи определенных видов включает в себя:

– знания о видах задач, способах решения задач каждого вида;

– умения «узнать» задачу данного вида, выбрать соответствующий ей способ решения и реализовать его на «узнанной» задаче.

Для обоснования выбора действия при решении простой задачи широко использовались метод решения простых задач по их виду и метод решения с помощью «подсказывающих» слов.

В настоящее время приоритетным становится другой, так называемый общий подход к обучению решения задач, цель которого организовать процесс обучения решению задач таким образом, чтобы ребенок мог решать любую задачу, в том числе, и не математического содержания. С этой целью необходимо у школьников сформировать те умения, которые используются при решении любой задачи и обеспечивают самостоятельный поиск решения задачи.

Существенный вклад в совершенствование и распространение данного методического направления в обучении решению задач внесли работы В.В. Давыдова, Л.М. Фридмана, Л.П. Стойловой, Н.Б. Истоминой.

При втором подходе к обучению решению задач подбор задач осуществляется с ориентацией на универсальные учебные действия, которые могут формироваться у учащихся при решении той или иной задачи. При данном подходе ученики должны выполнять семантический и структурный анализ текстов задач вне зависимости от их видов и количества действий, выявлять взаимосвязи между данными и искомыми и представлять задачу в виде какой-либо модели – краткую запись, схему, чертеж, либо сразу в математических символах в виде записи решения. Результатом такого обучения является обобщенное умение решать задачи.

Для развития у учащихся обобщенного умения решать задачи необходимо:

– формирование знаний о задачах, методах и способах решения, приемах, помогающих решению в процессе работы над задачей, этапах этого процесса, назначении и содержании каждого этапа;

– выработка умения расчленять задачи на составные части, использовать различные методы решения, адекватно применять приемы, помогающие понять задачу, составить план решения, выполнить его, проверить решение.

Итак, мы рассмотрели два подхода в обучении решению задач:

– четкое разграничение видов задач с целью прочного усвоения учащимися способов решения задач этих видов;

– формирование у учащихся обобщенного способа решения задач.

Реальная практика обучения младших школьников решению текстовых математических задач свидетельствует об эффективности обучения сочетающего в себе частный и общий подходы в формировании умения решать текстовые математические задачи.

Такой точки зрения придерживается ряд методистов, работающих над проблемой формирования у младших школьников умения решать текстовые задачи. Так, С.Е. Царева [98] отмечает, что в процессе обучения младших школьников необходимо использовать и тот, и другой подход. Причем сначала формировать у учеников обобщенные умения, а от них идти к обучению способам решения задач конкретных видов. Такое обучение, по мнению С.Е. Царевой, возможно при сочетании трех линий в содержании и организации деятельности учащихся:

– накопление опыта решения разнообразных задач;

– овладение компонентами обобщенного приема решения задачи в специально организованной для этого деятельности;

– выработка умения решать все виды простых задач и отдельные виды составных задач.

2. Классификация простых задач

В методике математики имеются различные классификации простых задач. В качестве примера приведем классификацию М.А. Бантовой [10].

В данной классификации деление задач на группы происходит в зависимости от тех понятий и знаний, которые формируются при их решении. Выделяются три группы простых задач.

К первой группе относятся простые задачи, при решении которых дети усваивают конкретный смысл каждого из арифметических действий.

В этой группе пять видов задач.

1) Нахождение суммы двух чисел. (Во дворе гуляли 3 мальчика и 2 девочки. Сколько всего детей гуляло во дворе?)

2) Нахождение остатка (На тарелке лежало 6 пирожков. Два пирожка дети съели. Сколько пирожков осталось на тарелке?)

3) Нахождение произведения. (В живом уголке хомячки жили в четырех клетках, по 2 хомячка в каждой клетке. Сколько всего хомячков в живом уголке?)

4) Деление на равные части. (Мама раздала 6 апельсинов поровну 3 детям. Сколько апельсинов досталось каждому ребенку?)

5) Деление по содержанию. (Учительница раздала 10 тетрадей ученикам по 2 тетради каждому. Сколько учеников получило тетради?)

Ко второй группе относятся простые задачи, при решении которых учащиеся усваивают связь между компонентами и результатами арифметических действий. К ним относятся задачи на нахождение неизвестных компонентов.

1) Нахождение первого слагаемого по известному значению суммы и второму слагаемому. (Во дворе гуляли несколько мальчиков и 2 девочки. Всего во дворе гуляло 5 детей. Сколько мальчиков гуляло во дворе?)

2) Нахождение второго слагаемого по известному значению суммы и первому слагаемому. (Во дворе гуляли 3 мальчика и несколько девочек. Всего во дворе гуляло 5 детей. Сколько девочек гуляло во дворе?)

3) Нахождение уменьшаемого по известным вычитаемому и значению разности. (На тарелке было несколько пирожков. Когда два пирожка съели, на тарелке осталось 4 пирожка. Сколько пирожков было на тарелке?)

4) Нахождение вычитаемого по известным уменьшаемому и значению разности. (На тарелке было 6 пирожков. Когда несколько пирожков съели, на тарелке осталось 4 пирожка. Сколько пирожков съели?)

5) Нахождение первого множителя по известным значению произведения и второму множителю. (Неизвестное число умножили на 4 и получили 20. Найти неизвестное число.)

6) Нахождение второго множителя по известным значению произведения и первому множителю. (7 умножили на неизвестное число и получили 35. Найти неизвестное число.)

7) Нахождение делимого по известным делителю и значению частного. (Неизвестное число разделили на 4 и получили 7. Найти неизвестное число.)

8) Нахождение делителя по известным делимому и значению частного. (32 разделили на неизвестное число и получили 8. Найти неизвестное число.)

К третьей группе относятся задачи, при решении которых раскрываются понятия разности и кратного отношения. К ним относятся простые задачи, связанные с понятием разности

(6 видов), и простые задачи, связанные с понятием кратного отношения (6 видов).

1) Разностное сравнение чисел (1 вид). (У Кати 3 шарика, а у Маши 5 шариков. На сколько шариков у Маши больше, чем у Кати?)

2) Разностное сравнение чисел (2 вид). (У Кати 3 шарика, а у Маши 5 шариков. На сколько шариков у Кати меньше, чем у Маши?)

3) Увеличение числа на несколько единиц (прямая форма). (У Кати 3 шарика, а у Маши на 2 шарика больше, чем у Кати. Сколько шариков у Маши?)

4) Увеличение числа на несколько единиц (косвенная форма). (У Кати 3 шарика, это на 2 шарика меньше, чем у Маши. Сколько шариков у Маши?)

5) Уменьшение числа на несколько единиц (прямая форма). (У Маши 5 шариков, а у Кати на 2 шарика меньше, чем у Маши. Сколько шариков у Кати?)

6) Уменьшение числа на несколько единиц (косвенная форма). (У Маши 5 шариков, это на 2 шарика больше, чем у Кати. Сколько шариков у Кати?)

Задачи, связанные с понятием кратного отношения (назовем их, не приводя примеры).

7) Кратное сравнение чисел или нахождение кратного отношения двух чисел (1 вид). (Во сколько раз больше?)

8) Кратное сравнение чисел или нахождение кратного отношения двух чисел (2 вид). (Во сколько раз меньше?)

9) Увеличение числа в несколько раз (прямая форма).

10) Увеличение числа в несколько раз (косвенная форма).

11) Уменьшение числа в несколько раз (прямая форма).

12) Уменьшение числа в несколько раз (косвенная форма).

3. Этапы обучения решению простых задач

Как показывает анализ методической литературы при обучении детей решению задач выделяют следующие этапы:

– подготовительный этап;

– этап ознакомления с задачей и формирование умений работать над задачей;

– этап отработки этих умений в процессе решения различных задач.

На подготовительном этапе к обучению решению задач необходимо сформировать у учащихся базовые умения:

– слушать и понимать тексты задач различной структуры;

– правильно представлять и моделировать ситуации, предлагаемые учителем;

– правильно выбирать действие в соответствии с ситуацией;

– обосновывать выбор действия, с помощью которого решается задача;

– составлять математическое выражение с выбранным действием;

– осуществлять проверку правильности решения задачи.

Опишем основные условия корректной подготовки учащихся к обучению решению задач.

1. Обучение детей моделированию различных ситуаций (объединение совокупностей, удаление части из множества, увеличение на несколько элементов данного множества или множества равночисленного данному, сравнение множеств и др.) на различной наглядности символического характера (фигурки животных, сюжетные картинки, геометрические фигуры, счетные палочки и др.).

2. Обучение учащихся выбору арифметических действий и составлению математических выражений в соответствии с заданной ситуацией.

3. Ознакомление учащихся со следующими связями:

– связью операций над множествами с арифметическими действиями, т. е. с конкретным смыслом арифметических действий;

– связью отношений «больше», «меньше» с арифметическими действиями, т.е. с конкретным смыслом выражений «больше на …», «меньше на …», «больше в … раз», «меньше в … раз»;

– связью между компонентами и результатами арифметических действий;

– связью между данными величинами, находящимися в прямой и обратной зависимости и соответствующими арифметическими действиями.

Умение выбирать арифметическое действие в предложенной ситуации зависит от умения ребенка переводить различные реальные события (предметные ситуации) и связи между ними на язык математических символов. Для этого на уроках целесообразно использовать задания, связанные с составлением рассказа по картинке, и записи его с помощью математических символов. На первых порах рассказ не должен содержать вопроса, так как цель задания – учить ребенка составлять по картинке математическое выражение или равенство в соответствии с предложенной предметной ситуацией, содержащей численные характеристики объектов. С технологией работы над предметными ситуациями можно познакомиться в теме «Знакомство со смыслом арифметических действий».

Основная задача второго этапа обучения решению задач:

– ознакомление с понятием «задача» и ее существенными признаками;

– обучение анализу задачи, формам записи ее решения и ответа, способам проверки правильности решения задачи.

В различных системах обучения ознакомление с простой задачей происходит в разное время. В ряде программ понятие «задача» вводится в конце второй четверти, в других (А.А. Аргинская, Н.Б. Истомина) учащиеся знакомятся с задачей во втором классе. При введении понятия «задача» следует опираться на этапы формирования понятий, предложенные Н.Ф. Талызиной [88].

Первый этап предполагает выделение всевозможных признаков данного понятия и отделение от этой совокупности существенных признаков.

Для того чтобы деятельность, направленная на усвоение структуры задачи, не была однообразной, не сводилась к восприятию условия и вопроса задачи Н.Б. Истомина [37] предлагает следующие виды упражнений.

– Сравнение текстов задач.
– Постановка вопроса учащимися к условию.
– Составление условия к данному вопросу.
– Задачи с недостающими данными.
– Задачи с лишними данными.
– Преобразование вопроса, условия, данных задачи.
– Составление задач по рисунку, краткой записи, по решению.

Для сравнения целесообразно подбирать такие пары задач, которые имеют: а) одинаковые условия, но различные вопросы; б) одинаковые вопросы, но различия в условиях; в) одинаковые решения, хотя смысл одного и того же действия в каждой задаче различен.

При работе над задачей целесообразно проводить семантический анализ текста задачи. Под семантическим анализом текста задачи понимается процесс прочтения задачи с последующим выделением основных понятий, связанных со специфическим названием частей этого текста: условие, вопрос, известные данные, неизвестные искомые элементы задачи [14]. В результате осуществления данного анализа ребенок осознает и представляет себе ситуацию, данную в тексте задачи, и устанавливает связи между данными и искомым.

Основная задача третьего этапа обучения решению задач – формирование у младших школьников обобщенного умения решения задач.

Обобщенное умение решать задачи включает в себя:

– знание о задачах, методах и способах решения, приемах, помогающих решению в процессе работы над задачей, этапах этого процесса, назначении и содержании каждого этапа;

– умение расчленять текст задачи на составные части, использовать различные методы решения, адекватно применять приемы, помогающие понять содержание задачи, составить план решения, выполнить его, проверить решение.

С точки зрения методики простая задача является «одношаговым» описанием соответствующей ей предметной ситуации [14]. Как было отмечено выше, целью работы над простой задачей является обучение ребенка самостоятельной работе над текстовой формой простой задачи с применением всех приобретенных ранее умений:

– моделирование заданной в тексте задачи ситуации;

– выбор арифметического действия и составление математического выражения;

– вычисление значения составленного выражения;

– запись ответа задачи;
– проверка правильности решения задачи.

Смысл работы над простой задачей заключается в усвоении учащимися двух предметных умений: умении перевести текстовое описание ситуации (словесную модель) в графическую (чертеж, краткую запись, графический рисунок) и записать решение (символическая модель). Таким образом, процесс решения задачи можно представить в следующем виде:

словесная модель – графическая – символическая модель.

Таким образом, процесс решения задачи рассматривается как процесс поиска системы моделей. Каждая модель представляет собой одну из форм отображения структуры задачи, а преобразование ее идет по пути постепенного обобщения, абстрагирования и в конечном результате построения ее математической (символической) модели. Следовательно, чтобы решить задачу, надо построить ее математическую модель, но для этого используются графические (или другими словами вспомогательные) модели.

Уровень овладения моделированием определяет успех решающего задачу. Поэтому обучение моделированию, по мнению Л.П. Стойловой [86], должно занимать особое место в формировании умения решать задачи, это обучение должно вестись целенаправленно, соблюдая ряд условий.

Во-первых, все математические понятия, используемые при решении задач, должны изучаться с помощью моделей.

Во-вторых, должна вестись работа по усвоению знаково-символического языка, на котором строится модель. Ученик должен осознавать значение каждого элемента модели, осуществляя переход от реальности (предметной ситуации) к модели и, наоборот, от модели к реальности.

В-третьих, одним из этапов обучения должно быть освоение моделей тех отношений, которые рассматриваются в задачах.

И, в-четвертых, ученик должен освоить различные виды моделей, научиться выбирать модель, соответствующую предложенной задаче, и переходить от одной модели к другой.

Исходя из вышесказанного, процесс работы над простыми задачами можно рассматривать как подготовительный этап к решению составных задач. С данной точки зрения понятие «умение решать простые задачи» можно рассматривать, как умение работать с текстовым описанием ситуации и оформлять его в виде соответствующих моделей.

4. Технология обучения решению задач Е.М. Семенова

Остановимся на малоизвестной широкой общественности методике обучения решению задач, которую назовем по фамилии автора «методикой обучения решению задач по Е.М. Семенову». Особенности этой методики заключаются в том, что она опирается на корректно выполненную классификацию простых задач. Рассмотрим кратко данную классификацию, показанную на схеме 1 (Рис. 2).

Расшифровка сокращений в схеме.

Условимся обозначать известные числа в задаче буквами А или В, а неизвестные буквой Х, тогда структуру «ГОТ → А» читаем как «главный опорный термин относится к известному числу», а структуру «ГОТ → Х» читаем как «главный опорный термин относится к неизвестному числу».

РС – разностное сравнение, выражающееся в словах «больше (меньше) на …, чем».

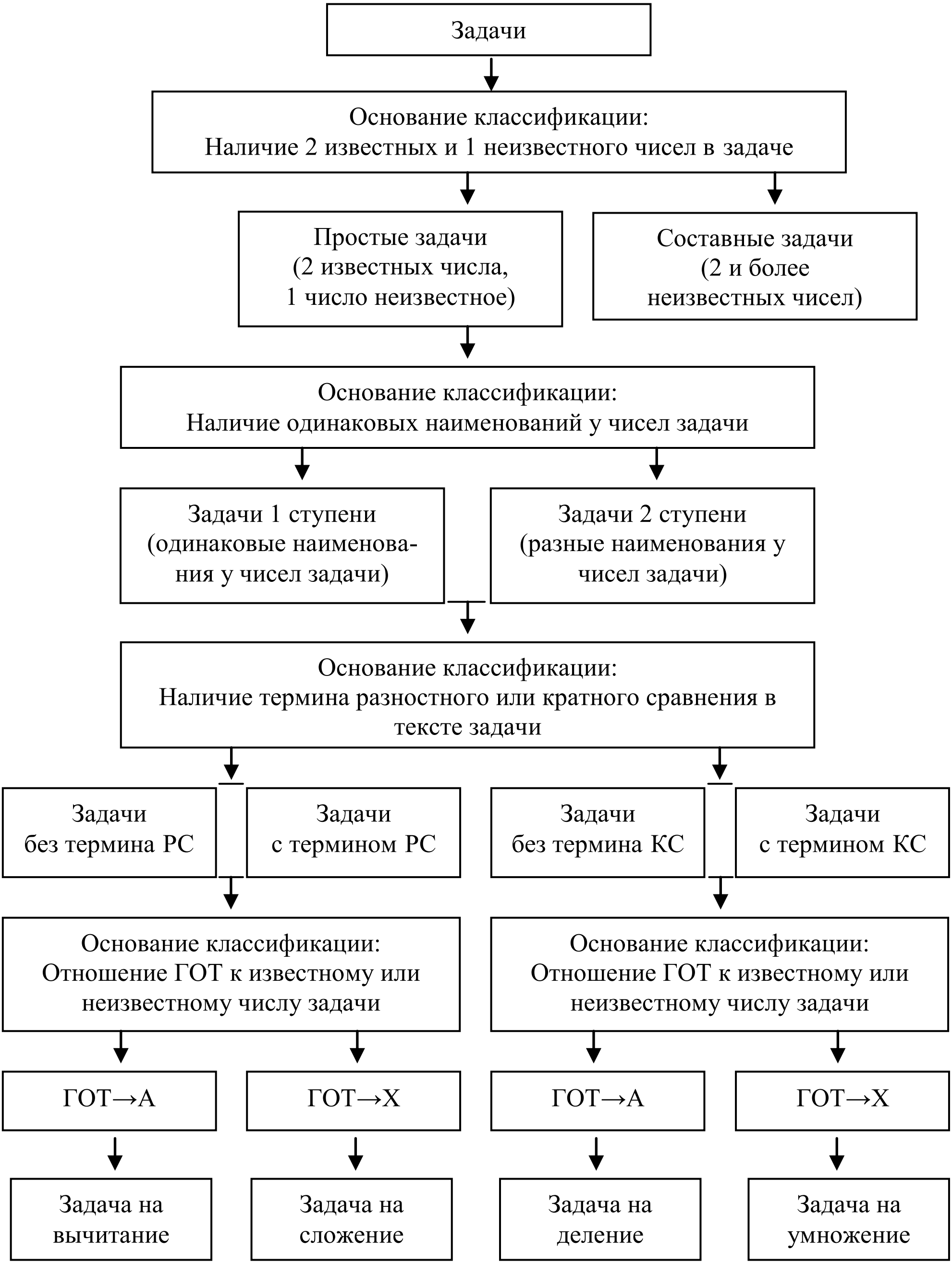


Рис. 2. Классификация простых задач Е.М. Семенова

КС – кратное сравнение, выражающееся в словах «больше (меньше) в …, чем».

ГОТ – главный опорный термин.

Все множество текстовых задач по признаку «наличие в задаче двух известных чисел и одного неизвестного числа» разбивается на две большие группы – простых и составных задач. Значит, признак «наличие в задаче двух известных чисел и одного неизвестного числа» является существенным для понятия «простая задача».

Следующий признак «наличие одинаковых наименований у чисел задачи» позволяет разбить все множество простых задач на две группы:

– задачи 1-ой ступени, которые обладают признаком «все числа задачи имеют одинаковые наименования или наименованиями, сводимые к одному, обобщающему» и которые решаются действиями сложения или вычитания;

– задачи 2-ой ступени, у которых числа имеют различные наименования и которые решаются действиями умножения или деления.

В свою очередь, каждая из этих групп разбивается еще на две группы задач. Задачи 1-ой ступени классифицируются по признаку «наличие в тексте задачи термина разностного сравнения», а задачи 2-ой ступени по признаку «наличие в тексте задачи термина кратного сравнения». В результате получаем четыре группы задач.

1. Простые задачи первой ступени без термина разностного сравнения.

2. Простые задачи первой ступени с термином разностного сравнения.

3. Простые задачи второй ступени без термина кратного сравнения.

4. Простые задачи второй ступени с термином кратного сравнения.

Соответственно задачи первой и второй групп решаются действиями сложения или вычитания, третьей и четвертой групп действиями умножения или деления.

В каждой из четырех групп задач необходимо найти главный опорный термин (далее ГОТ) по особому правилу.

Примечание: слова в задаче будем называть опорными, если они помогают объяснить связь между известными и неизвестными числами задачи, определить группу и вид задачи и установить действие, с помощью которого можно решить задачу.

Эти правила описаны ниже. Причем, в простых задачах первой и второй ступеней с термином разностного и соответственно кратного сравнения главный опорный термин (ГОТ) находится по одному правилу. Всего правил три.

Если главный опорный термин найден, то следует определить по тексту задачи к известному или неизвестному числу задачи он относится, т.е. определить вид задачи: «задача на сложение», «задача на вычитание», «задача на умножение», «задача на деление».

Правило для задач 1-ой ступени

Если ГОТ относится к неизвестному числу задачи, то задача решается действием сложения, а если к известному числу, то действием вычитания.

Правило для задач 2-ой ступени

Если ГОТ относится к неизвестному числу, то задача решается действием умножения, а если к известному числу, то действием деления.

Правила нахождения ГОТ у простых задач

№ 1. Правило нахождения ГОТ у простых задач 1 ступени без термина разностного сравнения.

– Найди три взаимосвязанных термина.

– Найди причинный термин, т.е. слово, указывающее на причину количественных изменений.

– Определи направленность причинного термина. Если причинный термин указывает на увеличение первоначального количества, то главный опорный термин (ГОТ) будет слово, связанное с вновь полученным количеством.

– ГОТ найден.

– Смотри, к известному или неизвестному числу задачи относится ГОТ.

– Выбери действие, с помощью которого решается задача в соответствии с правилом, если ГОТ относится к неизвестному числу, то задача решается действием сложения, а если к известному числу, то действием вычитания.

№ 2. Правило нахождения ГОТ у простых задач 1 (2) ступеней с термином разностного (кратного) сравнения.

– Найди (сформулировать самостоятельно, пользуясь текстом задачи) предложение, в котором указываются сравниваемые объекты и термин разностного (кратного) сравнения. (Структура этого предложения будет иметь вид: «А больше (меньше), чем В»).

– Действуй по правилу: если в предложении используется термин «больше, чем», то ГОТ стоит перед термином разностного сравнения, т.е. перед словосочетанием «больше, чем». Если в предложении используется термин сравнения «меньше, чем», то ГОТ стоит после слова «чем».

– ГОТ найден.

– Смотри, к известному или неизвестному числу задачи относится ГОТ.

– Выбери действие, с помощью которого решается задача в соответствии с правилом: если ГОТ относится к неизвестному числу, то задача решается действием сложения (умножения), а если к известному числу, то действием вычитания (деления).

№3. Правило нахождения ГОТ у простых задач 2 ступени без термина разностного сравнения.

– Выдели числа задачи с полными наименованиями.

– Найди число с составным наименованием и выдели первую часть составного наименования.

– Найди число с таким наименованием, которое совпадает с первой частью составного наименования. Оно и будет играть роль ГОТ.

– ГОТ найден.

– Смотри, к известному или неизвестному числу задачи относится ГОТ. Определи, известно или нет число, наименование которого совпадает с наименованием первой части составного наименования.

– Выбери действие, с помощью которого решается задача, в соответствии с правилом: если ГОТ относится к неизвестному числу, то задача решается действием умножения, а если к известному числу, то действием деления.

Приведем несколько примеров.

Задача №1. «В вазе было 7 яблок. Три яблока съели за обедом. Сколько яблок осталось в вазе?»

1. Выделяем три взаимосвязанных термина (было, съели, осталось) и их численные значения.

Было – 7ябл.

Съели – 3 ябл.

Осталось – ? ябл.

2. Находим причинный термин, т.е. слово, указывающее на причину количественных изменений. Причинным термином будет слово «съели». Оно указывает на уменьшение первоначального количества, обозначенного числом 7. Значит, слово «было» есть главный опорный термин.

3. Смотрим, к известному или неизвестному числу задачи относится ГОТ. В задаче известно, что было 7 яблок. Значит, ГОТ относится к известному числу.

4. Выбираем действие, с помощью которого решается задача в соответствии с правилом. Задача решается действием вычитания.

Покажем несколько другой анализ задачи, проведенный с указанием всех существенных признаков данной задачи.

Задача № 2. «На полку поставили 3 книги, когда на ней уже было 7 книг. Сколько книг стало на полке?»

Было – 7 кн.

Поставили – 3 кн.

Стало – ? кн.

В задаче два известных числа и одно число неизвестно, значит задача простая. Все числа в задаче имеют одинаковые наименования – книги, значит, эта задача 1-ой ступени и будет решаться либо действием сложения, либо вычитания.

Причинный термин «поставили» указывает на увеличение первоначального количества, значит, ГОТ будет слово «стало». Это слово относится к неизвестному числу задачи, значит, задача будет решаться действием сложения.

Задача № 3. «В корзине стало грибов в 3 раза больше, чем было. Сколько грибов было в корзине, если в ней стало 12 грибов?»

В задаче два известных числа и одно число неизвестно, значит задача простая. Числа в задаче имеют разные наименования – «грибов» и «раз», значит, эта задача 2-ой ступени и будет решаться либо действием умножения, либо деления.

В задачу входит термин кратного сравнения «в … раз больше, чем». Значит, ГОТ в полном предложении с термином кратного сравнения находится перед этим термином. Находим это слово в предложении «В корзине стало грибов в 3 раза больше, чем было. Слово «стало» – ГОТ, он относится к известному числу. Делаем вывод: в соответствии с правилом нахождения действия, с помощью которого решаются простые задачи 2-ой ступени с термином кратного сравнения, данная задача решается действием деления.

Задача № 4. «Купили несколько карандашей по 8 рублей за карандаш. Сколько карандашей купили, если за эту покупку уплатили 24 рубля?»

В задаче два известных числа и одно число неизвестно, значит задача простая. Числа в задаче имеют разные наименования: 8 рублей за карандаш; 24 рубля; ? карандашей, значит это задача 2-ой ступени и без термина кратного сравнения.

Находим первую часть у составного наименования «рублей за карандаш», это будет наименование «рублей». Наименование «рублей» будет выполнять роль ГОТ. Число с наименованием «рублей» (ГОТ) известно, значит, в соответствии с правилом нахождения действия, с помощью которого решаются простые задачи 2-ой ступени без термина кратного сравнения, данная задача будет решаться действием деления.

При первом знакомстве с этой классификацией, процесс определения рода и вида задачи, а затем, применение правил нахождения главного опорного термина в задачах каждого вида кажется достаточно громоздким. Но это только при первом знакомстве. Все выстроено достаточно логично. Теперь виды простых задач приобрели существенные признаки, а значит, задачи можно сравнивать, классифицировать по существенным признакам, осуществлять операцию подведения под понятие и операцию выведения следствия из факта принадлежности данной задачи к тому или иному виду. Теперь дети будут вчитываться в текст задачи, выполняя ее семантический анализ.

Как известно, семантические умения включают в себя все действия, характеризующие процесс усвоения понятий:

– узнавание объектов по их терминам или символам среди других объектов или изображений, выделение существенных признаков и воспроизведение понятия, оценка соответствия словесного или символического выражения предметно-материальной или материализованной ситуации;

– подведение объекта под понятие, отрицание понятий, нахождение взаимосвязей между ними;

– воспроизведение объектных ситуаций в словесно-символической форме, мысленное оперирование терминами и символами.

Процесс формирования этих понятий не скоротечен, предполагает большую предварительную работу с простыми истинными математическими сообщениями и никак не отвергает, а усиливает и обогащает представления детей о методе моделирования и предполагает значительную работу по формированию универсальных учебных действий.

Вопросы для самопроверки

1. Какое положение является основанием для классификации простых задач М.А. Бантовой?
2. Перечислите виды простых задач и приведите примеры простых задач каждого вида.
3. Охарактеризуйте содержание работы на каждом этапе формирования умения решать простые задачи.
4. Сформулируйте и обоснуйте развивающие возможности классификации простых задач по технологии Е.М. Семенова.

Задания для самоподготовки

1. Для каждой из ниже данных задач выполните следующие задания:

– назовите вид задачи и укажите действие, с помощью которого решается задача.

– обоснуйте выбор арифметического действия.

Задачи.

1) Дети собирали грибы. Саша нашел 5 грибов, а Миша 3 гриба. Сколько грибов они нашли вместе?

2) В корзине 15 грибов. Из них 5 белых, остальные – лисички. Сколько в корзине лисичек?

3) В цирке выступало 11 обезьян и 7 тигров. На сколько меньше выступало тигров, чем обезьян?

4) Мама испекла 13 пирожков. Гриша съел 5 пирожков. Сколько пирожков осталось?

5) У хозяйки 9 кур, а уток на 4 меньше, чем кур. Сколько уток у хозяйки?

6) Карандаш длиннее ручки на два сантиметра. Какова длина ручки, если длина карандаша равна 16 см?

7) Купили 2 коробки карандашей по 120 рублей каждая. Сколько уплатили за покупку?

8) Сколько морковок получит каждый кролик, если было всего 15 морковок и пять кроликов?

2. Приведите примеры заданий, направленных на формирование задачи определенного вида по методике Е.М. Семенова.

3. Разработайте конспект урока по теме «Формирование умения решать задачи на нахождение части целого».

4. Рассмотрите каждую из ниже данных задач, сделайте к каждой задаче краткую запись, графическую и символическую модели. Сравните тексты и модели задач. Смысл какого математического действия раскрывается через совокупность предложенных ниже задач? В чем обучающая ценность рассмотрения такой совокупности задач?

Задача 1. У Кати 6 цветных карандашей и 2 простых. Сколько карандашей у Кати?

Задача 2. Маша отдала 6 конфет Даше и 2 конфеты Пете, после чего конфет у нее не осталось. Сколько конфет отдала Маша?

Задача 3. Ваня отдал 2 тетради Маше, после чего у него осталось 6 тетрадей. Сколько тетрадей было у Вани?

Задача 4. У Гриши 6 солдатиков, а у Сережи на 2 солдатика больше, чем у Гриши. Сколько солдатиков у Сережи?

Задача 5. У Гриши 6 солдатиков, их на 2 меньше, чем у Сережи. Сколько солдатиков у Сережи?

Задача 6. Гриша играл с Ваней в морской бой. Шесть партий он выиграл, а 2 проиграл. Сколько партий сыграли Гриша с Ваней?

Задача 7. В корзину с яблоками добавили 6 яблок. После того как несколько яблок взяли, в корзине осталось на 2 яблока меньше, чем было первоначально. Сколько яблок взяли?

Составьте такую же совокупность задач для иллюстрации математического действия вычитания.

5. Обоснуйте выбор арифметического действия при решении следующих задач. К каждой задаче составьте задачу обратную данной.

Задача 1. Школьники посадили 8 берез и 5 лип. На сколько лип посадили меньше, чем берез?

Задача 2. Купили 4 мяча по 12 рублей за каждый. Сколько стоила вся покупка?

Задача 3. В вагоне поезда могут разместиться 54 человека, а в автобусе на 25 человек меньше. На сколько человек рассчитан автобус?

Задача 4. С пасеки в августе собрали 28 л цветочного меда и 34 л липового. Сколько литров меда собрали с пасеки в августе?

3.2. Формирование общего приема решения задач

«Настя быстро читает задачу,
Света не успевает следить за текстом задачи.
– Ну, хватит тараторить, теперь давай по порядку.»

План лекции

1. Характеристика общего приема решения задач
2. Содержание и методика формирования общего приема решения задач

1. Характеристика общего приема решения задач

В настоящее время приоритетным становится так называемый общий подход к обучению решения задач, цель которого организовать процесс обучения решению задач таким образом, чтобы ребенок мог решать любую задачу, в том числе, и не математического содержания.

Существенный вклад в совершенствование и распространение данного методического направления в обучении решению задач внесли работы В.В. Давыдова, Л.М. Фридмана, Л.П. Стойловой, Н.Б. Истоминой. Так, Л.М. Фридман [93] отмечает, что для обучения учащихся самостоятельно решать задачи необходимо выработать у них общий подход к решению любых задач и тем самым сформировать у детей способность разумного поиска способа решения задач незнакомого вида. Таким образом, целью этого подхода является формирование у детей компонентов общего приема решения задач как метапредметного универсального учебного действия.

Особенно актуальным этот подход стал с появлением ФГОС второго поколения, где общий прием решения задач стал рассматриваться как метапредметное действие, формируемое средствами различных учебных дисциплин.

С внедрением выше названного образовательного стандарта важнейшей задачей современной системы образования является формирование универсальных учебных действий, обеспечивающих школьникам умение учиться, развитие способности к саморазвитию и самосовершенствованию и самореализации [92].

Как подчеркивается в материалах образовательного стандарта второго поколения, одним из главных универсальных учебных действий является общий прием решения задач, обеспечивающий формирование способности решать любые проблемы или задачи.

При этом следует понимать, что понятие «задача» имеет несколько синонимов: задание, цель, проблема и оно широко употребляется во многих разделах науки и практики (педагогическая задача, познавательная задача, техническая задача). Несмотря на такой разброс в использовании термина «задача», процесс ее решения в любой области обладает общностью и имеет общую структуру:

– вхождение в ситуацию, требующее досконального анализа ситуации;
– моделирование ситуации, сопровождающееся анализом отношений, используемых в задаче;
– планирование решения задачи;
– реализация плана;
– проверка результата на соответствие поставленной цели;
– оценка процесса решения.

При обучении различным предметам используются задачи, которые принято называть учебными. Решение учебных задач выступает как средство обучения. С их помощью формируются метапредметные и предметные знания, умения, навыки. Умение ставить и решать учебные задачи является одним из основных показателей уровня развития учащихся, открывает им пути овладения новыми знаниями.

В то же время, есть учебные предметы – математика, физика, химия, где решаются так называемые текстовые задачи. Решение текстовых задач на этих предметах рассматривается как предмет специального изучения. Таким образом, решение задач можно рассматривать в узком и широком смысле.

Если подойти к обучению решению текстовых математических задач как к обучению решению любой задачи в широком ее значении, то сформированная при этом способность может использоваться учащимися при решении различных задач (учебных, практических, текстовых математических) и в любом виде умственной и практической деятельности. Формируемые при этом действия, позволяющие решать любую (в том числе и текстовую) задачу, назвали компонентами общего приема решения задач, а способ формирования этой способности в процессе решения текстовых задач – общим подходом к обучению решению задач.

Общий прием решения задач в начальных классах должен быть предметом специального обучения с последовательной отработкой каждого из составляющих его компонентов. Он базируется на сформированности логических операций – умении анализировать объект, осуществлять сравнение, выделять общее и различное, осуществлять классификацию, сериацию, устанавливать аналогии. Овладение этим приемом позволит учащимся самостоятельно анализировать и решать различные типы задач внутри предмета и осуществлять перенос этого умения на решение задач в любой сфере деятельности. Таким образом, в силу своего системного характера данное универсальное учебное действие может рассматриваться как модельное для системы познавательных действий [39].

Таким образом, общий прием решения задач, сформированный в процессе решения текстовых математических задач, должен быть использован при решении учебных задач на уроках математики и в своей общей структуре должен быть перенесен на любой учебный предмет. По отношению к предметам естественного цикла содержание приема не требует существенных изменений – различия будут касаться специфического, предметного языка описания элементов задачи, их структуры и способов знаково-символического представления отношений между ними. Влияние специфики учебного предмета на освоение рассматриваемого универсального учебного действия проявляется также в различиях смысловой работы над текстом задачи. Например, при решении математических задач необходимо абстрагироваться от конкретной ситуации, описанной в тексте, и выделить структуру отношений, которые связывают элементы текста. При решении задач предметов гуманитарного цикла конкретная ситуация, как правило, анализируется не с целью абстрагирования от ее особенностей, а, наоборот, с целью выделения специфических особенностей этих ситуаций для последующего обобщения полученной предметной информации [39].

Итак, современный стандарт ориентирует образовательные системы, учителей практиков на формирование общего приема обучения решению задач. Как мы уже подчеркивали выше, обучение общему приему решения задач предполагает акцентирование усилий не на процесс получения ответа задачи, а на процесс решения, т.е. формирование компонентов общего приема решения задач, обеспечивающих решение любой задачи. Каждый из этих компонентов и умений, из которых они состоят, должны стать предметом специального обучения.

Общий прием решения задач, формируемый на математике, предполагает знание этапов решения, методов и способов решения, оснований для выбора арифметических действий, с помощью которых будет осуществляться решение, а также владение предметными знаниями: правилами, формулами, логическими приемами и операциями.

2. Содержание и методика формирования компонентов общего приема решения задач

Первым этапом работы над задачей и первым компонентом общего приема решения задач является восприятие и осмысление текста задачи.

Он осуществляется через чтение и анализ текста, повторение и моделирование текста задачи.

В математике различают три вида анализа текста задачи: семантический, логический и математический [39].

Цель этих видов анализа – обеспечить усвоение содержания текста задачи.

Семантический анализ предполагает:

– выделение и осмысление: отдельных слов, терминов, понятий, как житейского, так и математического характера;

– осознание грамматических конструкций («если … , то …», «после того, как» и т. д.);

– фиксирование количественных характеристик объекта;

– представление предметной ситуации, описанной в задаче, путем переформулировки или упрощенного пересказа текста с выделением только существенной для решения задачи информации;

– выделение общего смысла задачи, указание на объект и величину, которая должна быть найдена (стоимость, объем, площадь, количество и т. д.).

Логический анализ предполагает – умение заменять термины, характеризующие понятия (процессы, явления) их определениями; умение выводить следствия из имеющихся в условии задачи данных, неизвестных и отношений между ними.

Математический анализ включает анализ условия и требования задачи. Анализ условия направлен на выделение:

– объектов (предметов, процессов);

– рассмотрение объектов с точки зрения целого и частей, либо взаимосвязи между величинами;

– рассмотрение количества объектов и их частей или величин, характеризующих каждый объект;

– анализ характеристик величин: однородные, разнородные, числовых значений – известные и неизвестные;

– изменения данных: изменяются (указание логического порядка всех изменений) или не изменяются;

– выявление отношений между известными значениями величин.

Анализ требования: выделение неизвестных количественных характеристик величин объекта (ов) [39].

При реализации этого этапа важен самый первый момент – первоначальное чтение текста задачи. Этот момент в школьной практике недооценивается. Нередко, ребенок не успевает прочесть текст, а не только осмыслить его, как учитель уже вызывает ученика к доске для решения этой задачи. Нужно отметить, что поспешный переход сразу по получению информации к ее преобразованию без предварительного анализа обедняет процесс познания. А вместе с тем внимательное предварительное прочтение текста, представление учеником ситуации, описанной в задаче, позволяет сделать много полезных выводов и предположений относительно подходов к ее решению.

В процессе реализации этого этапа учат извлекать из текста информацию, определяющую решение задачи. Устанавливают, достаточно ли этой информации для решения, устраняют лишнюю информацию. Если это требует сюжет задачи, то определяют реальность информации. Преобразуют текст задачи (либо по заданной схеме, либо для упрощения восприятия текста), оставляя только математически значимую информацию.

В практике имеют место устоявшиеся приемы реализации этого этапа работы над задачей. В начальных классах на этом этапе формируется два основных действия – чтение задачи и повторение текста задачи. Обучая чтению текста задачи, акцентируют внимание на выделении голосом главных слов в задаче, соблюдение паузы перед числом, ведущим термином, наименованием у чисел задачи. Учат детей делать правильную расстановку логического ударения в тексте задачи, выделять голосом вопрос задачи.

В первом классе до окончания букварного периода задачу первый раз всегда читает учитель или хорошо подготовленный ученик. Задача читается один раз, а перед чтением дается установка на запоминание задачи или на представление ситуации, которая используется в задаче. Числа, используемые в задаче, фиксируются на интерактивной доске или демонстрируются на карточках. После окончания букварного периода вслух задачу читают дети, но только после предварительного знакомства с текстом задачи, путем чтения про себя.

При обучении повторению текста задачи используют следующие приемы**.**

1. Абстрагирование числа к сюжетному смыслу задачи. Этот прием используется на начальном этапе формирования умения решать задачи. Учитель, прочитав задачу, задает вопросы: «Назовите первое известное число в задаче. Скажите, что оно обозначает? Назовите второе число задачи, что оно обозначает? Что обозначает неизвестное число задачи?»

2. Повторение задачи по логическим частям. Например: «Сколько ручек было в пенале? Сколько еще ручек положили в пенал? О чем спрашивается в задаче?» Этот прием используется

в первом или втором классе на начальном этапе работы с задачей, либо при повторении задачи с незнакомым сюжетом.

3. Повторение по структурным частям задачи. Например: Повтори условие задачи. Повтори вопрос задачи.

4. Повторение полного текста задачи.

В зависимости от особенностей задачи проводят математический, логический и семантический анализы текста задачи, используя следующие приемы:

– преобразование текста задачи, которое предполагает исключение из текста той части, которая не влияет на результат решения, либо дополнение текста задачи недостающими данными;

– изменение порядка слов или предложений; замена некоторых слов синонимами; замена содержательного описания термином или наоборот;

– дополнение текста пояснением; уточнение единиц измерения величин и др.

Текстовая модель задачи часто включает несущественную для решения задач информацию. Чтобы можно было работать только с существенными смысловыми единицами, текст задачи переводят на язык графических моделей, т.е. представляют текст с помощью невербальных средств – моделей различного вида: чертежа, схемы, графика, таблицы, символического рисунка и др.

Перевод текста на язык математики с помощью невербальных средств – есть второй компонент общего приема решения задач и второй этап работы над задачей. Реализация этого этапа (второго компонента) предполагает выбор знаково-символических средств для построения графической модели адекватной математическому содержанию задачи. Модель задачи, построенная по определенным правилам, есть аналог задачи, в котором более четко отражена структура связей и отношений между объектами либо величинами, описанными в сюжете задачи. Перевод текста в форму графической модели позволяет обнаружить в нем свойства и отношения, которые часто с трудом выявляются при чтении текста.

После того как текст задачи лаконично представлен в виде графической модели, а порой и в процессе построения модели переходят к анализу отношений и связей между известными значениями, а также между известными и неизвестными значениями величин. Для этого проводится детальный анализ этих отношений. Результат этого анализа позволит нам выстроить план решения задачи. Поэтому данный этап разумно назвать этапом поиска плана решения задачи.

В методической литературе различают прямой анализ (синтез), обратный (анализ), смешанный (аналитико-синтетический). Каждый из этих видов анализа позволяет составить план решения задачи.

Прямой анализ предполагает, что из текста задачи выделяется ряд простых задач, входящих в ее состав, последовательное решение которых приводит к решению задачи. В процессе прямого анализа движение мысли идет от данных к вопросу.

Например, пусть дана задача: «В вазе лежало 3 яблока, а груш на 2 больше, чем яблок. Сколько всего фруктов лежало в вазе?» Серия вопросов прямого анализа данной задачи может быть следующей.

– Прочитайте вопрос задачи. Можно ли сразу ответить на вопрос задачи?

– Какая задача по составу?

– Выделите первую простую задачу.

– Каким действием решается эта задача? (сложением); Почему?

– Запишите решение первой простой задачи. (3 + 2 = 5 (груш)).

– Ответили мы на вопрос исходной задачи? (Нет.)

– Выделите вторую простую задачу.

– Каким действием будем решать эту задачу? (сложением). Почему?

– Запишите решение второй простой задачи. (3 + 5 = 8 (фруктов)).

– Скажите ответ второй простой задачи.

– Ответили мы на вопрос исходной задачи? (Да.)

– Скажите план решения исходной задачи.

При обратном анализе движение мысли осуществляется от вопроса к данным и с каждым разом необходимо уточнять, какие величины нужно знать, чтобы найти значение неизвестной величины. Обратный анализ полезно сопровождать схемой (Рис. 3).

– Прочитайте вопрос задачи. (Сколько всего фруктов лежало в вазе?)

– Можно ли сразу ответить на вопрос задачи? (Нет)

– Каких два значения надо знать, чтобы ответить на вопрос задачи? (Сколько яблок и сколько груш лежало в вазе.)

– Какое значение нам уже известно? (Сколько яблок лежало в вазе.)

– Что неизвестно? (Сколько груш лежало в вазе.)

– Какие значения надо знать, чтобы вычислить, сколько груш лежало в вазе? (Сколько в вазе было яблок и на сколько груш было больше, чем яблок.)

– Какие из этих значений мы знаем? (Мы знаем оба этих значения.)

– Скажите план решения задачи. (Сначала мы узнаем, сколько груш было в вазе, а затем, сколько всего фруктов лежало в вазе.)

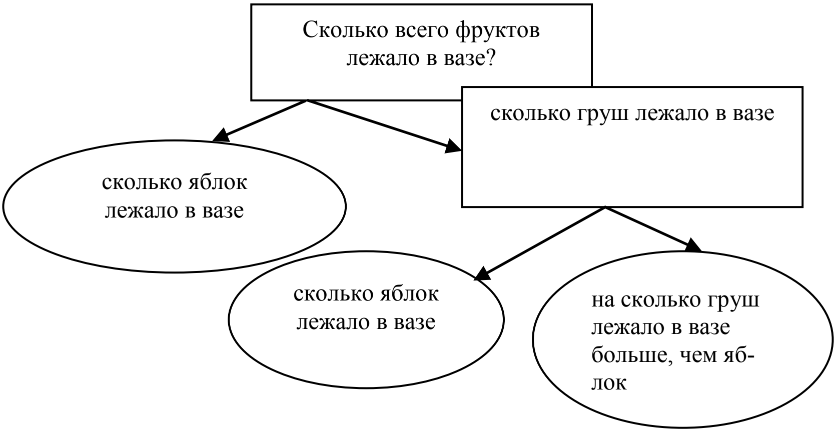


Рис. 3.

При смешанном анализе используется частично первый и второй вид анализ. Строгой последовательности в этом виде анализа нет.

– Можем ли мы сразу ответить на вопрос задачи? (Нет)

– Почему? (Не знаем, сколько груш было в вазе.)

– А можем ли узнать, сколько груш в вазе? (Да.)

– Почему? (Знаем, сколько яблок было в вазе и на сколько груш было больше, чем яблок.)

– Скажите план решения задачи.

Анализу задачи, как и предыдущим компонентам общего приема решения задач, следует специально учить детей. Наиболее продуктивно это можно сделать, используя приемы, предложенные в пособии по методике обучения математике в начальных классах, авторами которого являются С.А. Зайцева, И.Б. Румянцева, И.И. Целищева [31].

Авторы пособия предлагают технологию обучения анализу задач, которая состоит из следующих этапов.

Первый этап. Неявное знакомство с рассуждениями при коллективном решении задачи под руководством учителя.

Вопросы задает учитель, дети отвечают на вопросы. Цель работы детей – решить задачу. На этом этапе дети накапливают опыт осуществления анализа задач под руководством учителя и выполняют специально разработанные упражнения, готовящие детей к освоению анализа задачи.

Упражнения.

1. Составление различных выражений из данных задачи и объяснение их значения.

2. Объясни готовые решения задачи. Это особенно полезно тогда, когда задача имеет несколько решений.

3. Повторный анализ задачи после ее решения. (Это упражнение полезно не только на первом этапе обучения анализу.)

4. Анализ неверного решения, объяснение и исправление ошибки. Для этого соотносят каждое действие с условием и вопросом задачи.

Например. Что означает каждое число из данного действия? Что узнали, выполнив это действие? Нужно ли это для поиска ответа на основной вопрос задачи?

5. Выбор верного решения задачи (верного ответа) из предложенных вариантов.

Второй этап. Специальное знакомство учащихся с одним из видов анализа.

Этот урок полезно строить так, что дети могли осуществить целостный акт учебной деятельности, а именно, чтобы они:

– увидели, что соответствующие рассуждения помогают в решении задачи и захотели научиться проводить их самостоятельно;

– сами решали вопрос, как можно этому научиться, сами выбирали для этого необходимые виды работы (учитель в это время должен выступать в роли координатора, эксперта предложений детей, побудителя к действию);

– сами ставили перед собой вопросы: «А научился ли я?»; сами искали задания, с помощью которых они могли бы ответить на них.

Третий этап. Тренировка в использовании анализа задач при самостоятельном их решении.

Целесообразно периодически предлагать следующие задания.

1. Провести анализ задачи указанным способом.
2. Составить задачу, решение которой может быть найдено с помощью указанной цепочки рассуждений.
3. Закончить вопросы к данной задаче.
4. Найти ошибку в рассуждениях.
5. Вставить в вопросы необходимые данные. Используя различные пары данных, составить разные планы решения.
6. Установить соответствие между разными способами решения задачи и схемами ее анализа, составленными для каждого способа.

Четвертый этап. Явное знакомство с другими способами анализа задачи и тренировка в их использовании.

Пятый этап. Самостоятельное использование различных видов анализа задач при решении задач различных видов и степени трудности.

Составление плана решения задачи завершается записью решения задачи, что, собственно, и является следующим этапом решения задачи.

Одна из основных задач математического образования, согласно новому стандарту, – развитие математической речи, в том числе письменной, что напрямую связано с оформлением решения задач. С появлением контрольно измерительных материалов этот вопрос становится особенно актуальным, определяющим объективность оценки итоговых работ.

Вот как оценивает этот вопрос автор школьных учебников математики Г.В. Дорофеев [107]. Он считает вечным вопрос об оформлении решения, то есть о том, как должно быть записано решение, чтобы его можно было признать логически полным и грамотным. Исторически сложилась вариация разных способов оформления решения задачи. Рассмотрим наиболее распространенные формы записи решения текстовых задач.

Задача может быть решена устно с проговариванием тех действий, которые приведут к ответу. Но чаще всего решение задачи записывается. При этом используют запись решения задачи по действиям. Причем, различают запись по действиям без пояснения, с кратким пояснением, с подробным пояснением. Полезно использовать разные формы записи решения задачи.

Например. Из пунктов А и В навстречу друг другу вышли 2 автомобиля. Скорость первого автомобиля 60 км/ч, скорость второго автомобиля в 2 раза больше, чем у первого. Через 2 часа эти автомобили встретились. Каково расстояние между пунктами А и В?

а) Можно записать решение задачи только планом. Этот вид записи решения задачи предполагает запись только вопросов без выполнения действий.

1. Найдем скорость второго автомобиля.
2. Найдем путь, пройденный вторым автомобилем.
3. Находим путь, пройденный первым автомобилем.
4. Найдем расстояние между пунктами А и В.

б) Чаще используется решение задачи по действиям с пояснением или без пояснения.

1) $60 \cdot 2 = 120$ (км/ч)
2) $120 \cdot 2 = 240$ (км)
3) $60 \cdot 2 = 120$ (км)
4) $240 + 120 = 360$ (км)

в) Запись решения можно выполнить с помощью выражения, вычислив значение которого, можно ответить на вопрос задачи. (($60 \cdot 2) \cdot 2 + 60 \cdot 2 = 360$ (км))

г) Реже используется запись решения задачи по действиям с вопросами.

1) Какова скорость движения второго автомобиля?

$60 \cdot 2 = 120$ (км/ч)

2) Каков путь, пройден вторым автомобилем до встречи?

$120 \cdot 2 = 240$ (км/ч)

3) Каков путь, пройден первым автомобилем до встречи?

$60 \cdot 2 = 120$ (км/ч)

4) Каково расстояние между пунктами А и В?

$120 + 240 = 360$ (км)

д) Решение задачи может быть записано с помощью уравнения.

$x = 60 \cdot 2 + 60 \cdot 2 \cdot 2$

е) Запись решения задачи можно выполнить в таблице.

Таблица 5

	Скорость (v км в ч)	Время (t ч)	Расстояние (S км)
1автомобиль	60 км/ч	2 часа	? ($60 \cdot 2$) км
2 автомобиль	($60 \cdot 2$) км/ч	2 часа	? (($60 \cdot 2) \cdot 2$) км
Расстояние между городами			$60 \cdot 2 + 60 \cdot 2 \cdot 2 = 360$ (км)

ж) Решение задачи можно записать с помощью программы для ЭВМ.

з) Решение задач геометрического содержания, полезно выполнять путем построения требуемой фигуры с помощью чертежных инструментов.

Например, при решении задачи «Дан отрезок АВ длиной 4 см. Постройте отрезок, длина которого в 2 раза больше данного», второй отрезок удобно построить с помощью циркуля и линейки и, измерив с помощью линейки новый отрезок, дать ответ на вопрос задачи.

Каждая форма записи решения используется в соответствие с целевой направленностью урока и конкретно работы над задачей на уроке. Каждый вид записи имеет свою развивающую ценность. В настоящее время редко используется форма записи решения задачи «по действиям с вопросом». Но именно она остается полезной для формирования умения осознанно и самостоятельно решать задачи, формулировать вопросы, понимать текст задачи, анализировать его. По-прежнему остаётся полезной форма записи «по действиям с пояснением», которая в большей степени способствует развитию самоконтроля, самооценки, самопроверки, что важно для реализации системно-деятельностного подхода. «Свёрнутая» запись решения задачи «выражением» полезна, когда на уроке решается большое количество задач, а ученики уже готовы удерживать план решения задачи в уме.

В использовании некоторых форм записей решения задач нет однозначного ответа. Ряд вопросов, связанных с неоднозначностью подходов к записям решения задач, решает в своей статье Г.В. Дорофеев [107]. Опираясь на образцы записей, данных в контрольно-измерительных материалах [57], он отмечает, что для формы записи решения «по действиям без пояснения» актуальной является вариативность форм записи действий: натуральными числами без наименования; числами с наименованием единицы величины; с частичным обозначением в скобках в конце равенства единицы величины. «Ребёнок страдает из-за мнимого противоречия в задачах на «умножение» между определением действия умножения и переместительным законом умножения. Что делать с этим парадоксом? Какие записи решения задач на умножение учитель может считать правильными?

В апробируемых контрольно-измерительных материалах по математике от учеников требуется вместо решения задачи записать объяснение, а решение задачи является только одним из способов объяснения. Пример:

Ответ: ______________________________

Объясни свой ответ: ________________

Там же имеются следующие варианты верного объяснения в виде записи решения задачи числами с единицей величины:

1) 15 мин · 6 = 90 мин = 1 ч 30 мин;

2) 1 ч 30 мин + 1 ч 40 мин = 2 ч 70 мин = 3 ч 10 мин, 3 ч 10 мин > 3 ч.

Ещё к одной задаче предлагаются два верных варианта записи объяснения ответа: с частичным обозначением в скобках в конце равенства единицы величины и натуральными числами. А именно:

30 · 2 + 50 = 110 (р.),   105 р. < 110 р.

или 30 · 2 = 60,   105 – 60 = 45,   45 р. <50 р.

Ученики, как показывает практика, не путают порядок множителей при записи решения задачи, если для её понимания (анализа) они выполняют вспомогательную модель к задаче (чертёж, таблицу, схему, предметную модель и др.) или записывают решение задачи по действиям с вопросами» [55, с.].

Важным этапом решения любой задачи и одним из обобщенных универсальных действий является проверка правильности решения задачи. В школьной практике этот вид работы с текстовой задачей используется не столь часто. Однако, предусматривая формирование общего приема решения задачи и формирование такого важного универсального действия как действие контроля, этот этап работы над задачей следует проводить значительно чаще, целенаправленно обучая ему, знакомя детей с видами проверки правильности решения задачи.

Характеризуя действие контроля, В.В. Репкин [67] отмечает, что когда заданное действие уже выполнено учеником, то требование проконтролировать правильность его выполнения практически не имеет для него смысла. Даже если ребенок пытается выполнить это требование, то он просто еще раз выполняет это действие и по той же схеме. Намного осмысленнее эта задача будет в том случае, если контролировать необходимо не свои действия, а действия другого человека. При этом ошибки в действиях, которые будут контролировать дети, должны быть не любыми, а характерными, типичными, требующими развертывания и использования всего плана действия. Такие «ошибки» в учительских действиях, представляющие собой специальные «ловушки» для детей, необходимо специально продумывать.

Если контроль за действиями учителя уже сформирован, то нужно менять объект контроля. Теперь контролироваться должны действия других учеников. Лишь после этого объектом контроля могут стать собственные действия детей.

В работах А.Б. Воронцова [20] подчеркивается, что для накопления детьми опыта контроля и оценки своих знаний целесообразно использовать на уроках комплекс последовательно усложняющихся заданий, стимулирующих развитие итогового, пооперационного и прогностического контроля. С этой целью важно с первого класса формировать у детей следующие умения:

– сравнивать результат своей деятельности с образцом, заданным в материальной или графической форме;

– воспроизводить состав контрольных действий и операций, заданных учителем;

– выполнять действие по развернутой инструкции;

– сличение результата деятельности с образцом на основе самостоятельно прогнозируемых условий эффективности;

– выполнение действий по общей инструкции;

– осуществление самопроверки;

– самостоятельное корректирование работы.

С одной стороны, работа с задачами дает большие возможности для формирования данного универсального действия, с другой становление общего приема решения задач невозможно без действия контроля.

В связи с этим, кроме вышеназванных приемов нужно чаще использовать приемы проверки правильности решения задачи, выработанные многолетней практикой развития методической науки.

Например, дать текст задачи и готовое ее решение (способ записи решения можно варьировать). Детям нужно предложить выполнить проверку правильности решения одним из известных им способов. Такой прием не займет много времени, отводимого на работу с задачей, и приучает детей осуществлять проверку решения задачи.

Рассмотрим подробнее способы проверки правильности решения задачи, которые должны усвоить дети.

В методической литературе описано четыре основных приема проверки правильности решения задачи:

– составление задачи обратной данной и ее решение;

– решение задачи другим способом;

– проверка правильности решения задачи по всем условиям задачи;

– прикидка результата.

Проведя поверку правильности решения, надо обратить внимание на выполнение некоторых нюансов, делающих этот этап работы над задачей значимым и доступным. Закончив проверку, необходимо учить детей делать вывод о правильности решения исходной задачи. Например, решив задачу другим способом, полезно сделать вывод, формулируя такое предложение: «Решая задачу другим способом, мы получили такой же ответ, что и при решении этой задачи первым способом, значит, исходная задача решена правильно». Второй нюанс заключается в том, чтобы предусмотреть трудность той задачи, которую составляем для проверки исходной. Она должна быть не труднее исходной. Иначе этот способ проверки дети не будут использовать в самостоятельной работе. Рассмотрим подробнее алгоритмы деятельности учащихся при разных способах проверки правильности решения задачи.

Составление обратной задачи и ее решение

Сущность: ученик, решив исходную задачу, составляет обратную ей, при этом он выполняет следующие действия.

1. Подставляет найденное число (ответ исходной задачи) в текст исходной задачи.
2. Среди данных чисел исходной задачи выбирает какое-нибудь одно и использует его в качестве неизвестного в задаче, обратной исходной.
3. Формулирует текст обратной задачи.
4. Решает ее.
5. Ответ обратной задачи сравнивают с тем числом, которое было выбрано в качестве искомого в исходной задаче. Если эти числа совпадают, то ученик делает вывод, что исходная задача была решена верно.

Например, пусть дана следующая исходная задача: «Школьники посадили 12 лип, 3 березы, а тополей столько, сколько лип и берез вместе. Сколько всего деревьев посадили школьники?» Решение задачи.

1. 12 + 3 = 15 (д.) – столько тополей посадили школьники.
2. 15 + 15 = 30 (д.) – столько всего деревьев всего посадили школьники.

Ответ: школьники посадили 30 деревьев.

Обратная задача: «Школьники посадили 12 лип и несколько берез, а тополей столько, сколько лип и берез вместе.

Сколько берез посадили школьники, если всего школьники посадили 30 деревьев?» Решение этой задачи.

1. 30 : 2 = 15 (д.) – столько лип и берез посадили школьники.

2. 15 – 12 = 3 (д.) – столько берез посадили школьники.

Ответ: школьники посадили 3 березы.

Вывод: исходная задача решена правильно, потому что, решив задачу обратную к исходной, мы получили число, которое было дано в исходной задаче.

Этот способ проверки правильности решения задачи разумно использовать только тогда, когда обратная задача по меньшей мере не труднее, чем исходная, ее решение не вызывает затруднений, т.е. отработаны определенные приемы решения задач, используемые при решении обратной задачи. И все же, анализ практики показывает, что данный способ проверки правильности решения задачи в самостоятельной деятельности дети не используют, так как он для них труднее, чем решение исходной задачи. Разумнее этот вид проверки осуществлять под руководством учителя.

Решение задачи другим способом – наиболее часто используемый способ проверки правильности решения задачи. Сущность этого способа заключается в том, что, решив задачу одним способом, учащиеся отыскивают другой способ решения задачи. Получив результат решения задачи другим способом, ученик сравнивает его с ответом исходной задачи и делает вывод о правильности решения исходной задачи. Чтобы решение задачи другим способом воспринималось учениками как средство контроля, необходимо, чтобы этот другой способ был более легким или более освоен учениками, чем первый способ.

Например. В трех одинаковых банках 12 литров варенья. Сколько литров варенья в 6 таких же банках?

Первый способ.

1. 12 : 3 = 4 (л/б.) – объем одной банки варенья.

2. 4 · 6 = 24 (л) – объем варенья в 6 банках.

Ответ: в шести банках 24 литра варенья.

Второй способ.

1. 6 : 3 = 2 (р.) – во столько раз во втором случае банок использовали больше, чем в первом.

2. 12 · 2 = 24 (л) – объем варенья в 6-ти банках.

Ответ: в шести банках 24 литра варенья.

Вывод: решая задачу другим способом, мы получили такой же ответ, что и при решении первым способом, значит, исходная задача решена правильно.

Как показывают наши наблюдения, этот способ проверки гораздо проще для детей, но и он в начальных классах выполняется детьми лишь при специальном указании учителя.

Наиболее доступным приемом проверки правильности решения задачи в начальных классах является проверка правильности решения задачи по всем ее условиям или соотнесение полученного результата с условием задачи. Сущность проверки заключается в формулировании заключений по тексту задачи с выполнением арифметических действий или без них. Этот вид проверки носит неформальный характер, сами рассуждения основаны на понимании проверяющим всех слов, отношений и соответствий, заданных в тексте задач. Четкого алгоритма проведения этой проверки не существует. Каждая задача требует индивидуального хода рассуждений.

Пусть дана задача: «На стройке высотного дома работало 16 грузовиков, а на стройке магазина на 10 грузовиков меньше, чем на стройке дома. Сколько грузовиков работало на стройке магазина?»

16 – 10 = 6 (гр.) – столько грузовиков работало на стройке магазина.

Ответ: на стройке магазина работало 6 грузовиков.

Проверка может быть организована с помощью следующей беседы.

– Проверим, выполняется ли условие задачи, если считается, что на стройке магазина работало 6 грузовиков.

– Читаем условие задачи. «На стройке высотного дома работало 16 грузовиков, а на стройке магазина работало меньше».

– Проверим, выполняется ли это условие. «На стройке высотного дома работало 16 грузовиков, а на стройке магазина 6».

– Сравниваем, 6 меньше чем 16, в задаче тоже сказано, что на стройке дома работало меньше грузовиков. Значит, условие задачи выполнено, и задача решена правильно.

Прикидка результатов

Сущность заключается в том, что до начала решения задачи на основе предварительного анализа текста задачи определяется примерно результат решения. В процессе поиска решения и его выполнения школьники имеют возможность соотнести ответ задачи с прогнозируемым результатом. Чем точнее прогноз, тем выше его прогнозирующие функции. Этот способ не проверяет точность ответа. Он ценен тем, что заставляет проверять не только ответ, но и сам процесс решения задачи, а значит, формирует не только заключительный контроль, но и контроль по процессу. Этот вид проверки пригоден для использования детьми при самостоятельной проверке правильности решения задачи.

В качестве проверки правильности решения задач четвертым способом может служить прием составления различных моделей задач уже после ее решения.

В первом классе ответ задачи просто подчеркивается в решении задачи. Немного позже, когда дети уже смогут писать достаточно быстро, можно записывать ответ кратко, только число с наименованием (360 км.) При этом проговаривается полный ответ.

Ответ может быть записан полным предложением. (Ответ: расстояние между пунктами А и В равно 360 км). При этом помним, что предложение не следует начинать с числа, а наименование возле числа можно писать сокращенно.

После решения задачи полезно оценить или исследовать ее решение. На этом этапе можно установить, какие еще способы решения имеет задача, какой из способов наиболее рациональный, как изменилось бы решение задачи с изменением того или иного числа или отношения, заданного в задаче, какие похожие задачи уже решались и др.

В методической литературе описан ряд полезных заданий, которые рекомендуется проводить после решения задачи [14; 36; 68; 103].

1. Изменить условия задачи так, чтобы она решалась меньшим числом действий.

2. Постановка нового вопроса к уже решенной задаче.

3. Постановка всех вопросов, ответы на которые можно найти по данному тексту задачи.

4. Сравнение содержания данной задачи с содержанием и решением другой задачи, у которых есть как общие, так и различные элементы. (Условие, вопрос, числа, одинаковое число действий, сюжет задачи и т. д.)

5. Решение задачи другим способом или другим методом.

6. Изменение числовых данных задачи так, чтобы появился новый способ решения или, наоборот, чтобы один из способов решения стал невозможным.

Мы рассмотрели все этапы работы над задачей, которые отражают полный цикл работы над текстовой задачей. При обучении различным предметам используются задачи, которые принято называть учебными. Решение учебных задач выступает как средство обучения. С их помощью формируются метапредметные и предметные знания, умения, навыки. Умение ставить и решать учебные задачи является одним из основных показателей уровня развития учащихся, открывает им пути овладения новыми знаниями.

Вопросы для самопроверки

1. Какие подходы к формированию умения решать задачи реализуются в школьной практике?
2. Сформулируйте компоненты общего приема решения задач?
3. Перечислите виды моделей задач, используемых при формировании умения решать задачи.
4. Какие универсальные учебные действия формируются на каждом из этапов работы над задачей?
5. Перечислите виды проверки правильности решения задачи.

Задания для самоподготовки

1. Законспектируйте следующие статьи:

Артемов А.К. Формирование обобщенных умений решать задачи // Начальная школа. – 1992. – № 2.

Истомина Н.Б. Первые шаги в формировании умения решать задачи // Начальная школа. – 1998. – № 11, 12.

Обучение младших школьников решению текстовых задач: Сборник статей / Сост. Н.Б. Истомина, Г.Г. Шмырева. – Смоленск : Ассоциация XXI век, 2005. – 272 с.

Царева С.Е. Обучение решению задач // Начальная школа. – 1997. – № 11.

Ответьте на следующие вопросы.

Как трактуются авторами статей понятия: задача, решение задачи, процесс решения задачи, методы и способы решения задачи, обучение решению задачи, умение решать задачи.

Каким обобщенным приемам необходимо обучить школьников, чтобы сформировать умение решать задачи?

2. Выделите этапы решения задачи. Определите цель каждого этапа и приемы, с помощью которых можно использовать на каждом этапе. Результат представьте в табличной форме.

Таблица 6

Название этапа	Цель этапа	Приемы выполнения этапа
1. Восприятие и осмысление задачи		

3. Какие приемы работы рационально использовать на каждом при решении следующих задач. От чего может зависеть выбор приема работы над задачей на каждом этапе?

Задача 1. Две ученические бригады собрали 100 одинаковых мешков картофеля. Одна бригада собрала 2450 кг, другая – 2550 кг. Сколько мешков картофеля собрала каждая бригада?

Задача 2. Купили 6 одинаковых стульев и заплатили за них 4800 рублей. Сколько будут стоить 12 таких же стульев?

Задача 3. В магазине за три дня продали 1 т сахара. В первый день продали 300 кг сахара, во второй в 2 раза больше, чем в первый. Сколько килограммов сахара продали в третий день?

4. С чем связана необходимость обучения детей различным способам проверки правильности решения задачи? Составьте фрагменты уроков, на которых будете обучать детей различным способам проверки правильности решения задачи. Используйте для этого текст первой задачи из предыдущего задания.

5. Найдите в учебниках математики для начальных классов (по любой системе обучения) задания, направленные на формирование умения осуществлять проверку правильности решения задачи. Достаточно ли таких заданий для того, чтобы сформировать привычку к самоконтролю?

6. Выберите из учебника математики для начальных классов (по любой системе обучения) задания, направленные на формирование умения осуществлять поиск плана решения задачи. Приведите свои примеры заданий, направленных на формирование указанного умения.

7. Составьте развернутый план обобщающего урока в 1 классе (2, 3, 4 классах) по теме «Решение задач».

8. Составьте контрольную работу, с помощью которой можно определить уровень овладения умением решать задачи. Класс и систему обучения выберите самостоятельно.

9. Выполните анализ учебников по математике для начальной школы по системе Л.В. Занкова и «Школа России» и составьте перечень видов работы над задачей после ее решения, которые используются в этих образовательных системах. Результаты работы представьте в табличной форме (Таблица 7).

Таблица 7

Вид задания	Конкретный пример из учебника	Класс и страница учебника
1.		

10. Приведите примеры своих заданий, которые можно давать детям после решения исходной задачи. Укажите, с какой целью будете предлагать детям эти задания.

11. К данным в таблице задачам подберите задание, которое можно предложить детям после их решения (Таблица 8).

Таблица 8

Задачи	Варианты заданий к задачам
«Садовод собрал осенью 80 кг яблок, груш – в 4 раза меньше, чем яблок, а слив больше, чем груш. Сколько слив собрал садовод?»	Измените условие задачи так, чтобы в нем остались числа, которые необходимы для решения задачи. Какой вопрос можно поставить к условию задачи, чтобы данные в условии числа не были лишними?
«В зооуголке живут 20 кроликов, а кур – на 12 меньше, чем голубей. Сколько зверей и птиц живут в зооуголке?»	Измените вопрос так, чтобы задача имела решение. Не добавляя данных, измените условие задачи так, чтобы ее можно было решить.
«За два мяча заплатили 28 рублей. Сколько стоит каждый мяч?»	Сколько решений имеет задача? Дополните условие так, чтобы она имела только одно решение.
«Из 24 м шелка сшили 3 платья, 2 блузки и 2 халата. На блузки израсходовали 4 м ткани, а на платья – на 8 м больше, чем на блузки, а на халаты – остальной шелк. Сколько метров шелка израсходовали на халаты?»	Дополните условие задачи так, чтобы она имела решение.

12.Объясните причины ошибок, допущенных учащимися при решении задач.

Задача 1. В одной книге 20 страниц, это в 5 раз меньше, чем в другой. Сколько страниц в другой книге?

Решение: 20 : 5 = 4 (кн.)

Задача 2. Из коробки взяли 6 карандашей, а потом еще 3 карандаша. Сколько карандашей взяли из коробки?

Решение: 8 – 3 =5 (к.)

Задача 3. Володя решил 15 задач, а Надя 10 задач. На сколько задач больше решил Володя, чем Надя?

Решение: 15 +10 = 25 (з.)

13. Используя детские работы, найдите другие типичные ошибки, допускаемые учащимися при решении простых задач, и укажите пути их устранения. Какие типичные ошибки допускают учащиеся при решении составных задач?

14. Составьте блок-схему видов моделей текстовых задач.

1.3. Методы решения текстовых математических задач

План лекции

1. Виды методов решения текстовых задач
2. Характеристика арифметического метода решения задач
3. Технология обучения алгебраическому методу решения текстовых задач
4. Использование методов решения задач в различных программах по математике

1. Виды методов решения текстовых задач

Любое задание в математике можно рассматривать как задачу, так как в нем можно выделить условие, то есть ту часть, где содержатся сведения об известных и неизвестных величинах и отношениях между ними и требования, то есть указания на то, что нужно найти. Для выполнения требования применяется определенный метод действия, приводящий к результату. Исходя из этого понятие «метод решения задач» можно понимать как совокупность определенных действий, позволяющих дать ответ на вопрос задачи. Решить математическую задачу – это значит найти такую последовательность общих положений математики, применяя которые к условию задачи получаем то, что требуется найти – ответ.

Под методом решения задачи мы понимаем способ, с помощью которого обеспечивается достижение намеченной цели – решение конкретной задачи [73].

В курсе математики начальных классов используют практический, арифметический, алгебраический и геометрический, в частности, графический методы решения задач. Основными методами решения текстовых задач являются арифметический и алгебраический метод.

Практический метод предполагает, что для получения ответа на вопрос задачи ученик опирается на практические действия с реальными предметами. При графическом методе для получения ответа на вопрос задачи используют графические схемы, чертежи, рисунки.

2. Характеристика арифметического метода решения задач

Мышление младших школьников в 1-2 классах еще не готово к формальным процедурам, выполняемым при решении уравнений. В связи с этим в данном возрасте арифметический метод решения задач имеет ряд преимуществ по сравнению с алгебраическим методом потому, что результат каждого шага по действиям нагляднее и конкретнее, не выходит за рамки опыта детей 7-8 лет. В это время школьники лучше и быстрее решают задачи по действиям, чем с помощью уравнений. Детское мышление в эти годы еще достаточно конкретно, и формировать новые понятия и новые учебные действия надо на конкретных предметах и величинах, затем постепенно переходить к оперированию абстрактными образами.

В методической литературе нет строгих определений арифметического и алгебраического методов решения задач. Их смысл становится ясным с помощью описательной характеристики. Сущность арифметического метода решения состоит в последовательном выполнении следующих действий:

– расчленение составной задачи на простые;

– установление отношений между заданными и искомыми величинами в простых задачах;

– определение математических действий, соответствующих этим отношениям, что приводит к последовательному решению простых задач.

Решить задачу арифметическим методом –значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над данными в задаче числами. Одну и ту же задачу можно решить различными арифметическими способами. Они отличаются друг от друга логикой рассуждений в процессе решения задачи.

Большинство методических систем обучения математике в 1-2 классах ставят своей целью научить младших школьников решать задачи арифметическим методом. И только в третьем классе знакомят детей с алгебраическим методом.

Процесс обучения решению задач арифметическим методом включает в себя последовательное усвоение детьми следующих действий:

– чтение задачи и представление той ситуации, которая в ней описана;

– выделение в тексте условия и вопроса, известных и неизвестных чисел задачи;

– установление связи между данными и искомыми значениями величин, моделирование, заданной в тексте ситуации;

– выбор последовательности арифметических действий, используемых для решения задачи, и составление плана решения;

– запись решения задачи и ее ответа;

– проверка правильности решения задачи и полученного ответа.

При решении задач арифметическим методом формируются важное универсальное учебное действие, связанное с анализом текста, выделением условия задачи и ее вопроса, составлением плана решения, поиском отношений, из которых можно получить ответ на главный вопрос, проверкой полученного результата. Использование арифметических способов решения задач способствует общему развитию учащихся, развитию не только логического, но и образного мышления, лучшему усвоению естественного языка, а это повышает значимость обучения математике для успешного усвоения других дисциплин. Арифметический метод решения текстовых задач приучает детей к первым абстракциям, позволяет воспитывать логическую культуру, способствует созданию благоприятного эмоционального фона обучения. Развивает у школьников эстетические чувства применительно к решению задачи (красивое решение!) и изучению математики в целом, вызывая интерес сначала к процессу поиска решения задачи, а потом к изучаемому предмету.

Арифметические способы решения текстовых задач готовят ребёнка к овладению алгеброй.

Работа над формированием умения решать задачи арифметическим методом описана выше, поэтому в данном параграфе мы раскроем подробнее методику обучения алгебраическому методу решения задач.

3. Технология обучения алгебраическому методу решения текстовых задач

Особенность алгебраического метода состоит в следующем.

1. Вводится специальное обозначение неизвестной величины. Это позволяет действовать с ней как с реальной, то есть заданной величиной.

2. Выполняется анализ основных зависимостей между явными и неявными значениями величин и производится моделирование условия задачи в виде уравнения.

Решить задачу алгебраическим методом – значит найти ответ на требование задачи путем составления и решения уравнения.

Поскольку уравнение, это равенство выражений (высказываний), содержащих переменную величину, то равенство выражений составленных по задаче может быть установлено на основании совпадения сюжетного смысла этих выражений. Сюжетный смысл любого выражения (элементарного, простого или составного с переменной или без нее) составленного по задаче или взятого из текста задачи может служить основанием для составления равенства двух выражений (высказываний), т.е. для составления уравнения.

В этом случае решение задачи алгебраическим методом проводится по следующему алгоритму.

1. Обозначение буквой значения неизвестной величины.

2. Выбор основания для составления уравнения.

3. Составление 2-х выражений (возможно поэтапное), сюжетный смысл которых совпадает с основанием. Эти выражения могут быть элементарными, простыми или составными, но одно из них обязательно будет содержать неизвестную величину.

4. Составление уравнения, путем установления равенства между двумя выражениями, имеющими одинаковый сюжетный смысл по данной задаче.

5. Решение уравнения.

6. Проверка правильности решения задачи.

В качестве базовых знаний для усвоения детьми данного метода необходимо считать следующие знания и умения:

– усвоение понятия переменной величины;

– умение решать простые и составные уравнения различных видов с опорой на зависимость между компонентами и результатом действия;

– умение составлять по тексту задачи простые и составные выражения и определять их сюжетный смысл;

– умение выбирать из различных, составленных по задаче выражений, выражения с одинаковым сюжетным смыслом.

Основные методические этапы формирования умения решать задачи алгебраическим методом (АМ) можно назвать обобщенно: подготовительный, этап ознакомления с алгоритмом рассуждений и записью решения задач АМ, этап закрепления и выработки умения.

Дадим краткую характеристику каждого из этапов.

1 этап. Основная задача учителя на данном этапе – дать представление о сюжетном смысле выражения, составленного по тексту задачи, научить детей составлять всевозможные выражения по тексту задачи и определять их сюжетный смысл.

Реализацию этой задачи можно осуществить через следующую систему последовательно усложняющихся заданий, требующих от учеников все большей самостоятельности при их выполнении.

1. Дать текст с числами и, используя метод беседы, составить по этому тексту несколько выражений, определить их смысл по данному сюжету.

2. Дать текст с числами и составить по этому тексту несколько выражений, а детям предложить определить их сюжетный смысл в соответствии с данным текстом.

3. Задание, подобное предыдущему, но среди выражений должны быть такие, которые не имеют сюжетного смысла по данному тексту.

4. По предложенному тексту с числами дети самостоятельно составляют выражения и определяют их сюжетный смысл, а затем, находят выражения с одинаковым сюжетным смыслом.

5. Дать задачу, разъяснить способ обозначения неизвестной величины через *x* и способ составления выражении по задаче с использованием этой неизвестной величины как заданной, далее определить сюжетный смысл этих выражений, опираясь на текст задачи.

6. Предложить текст задачи, затем, учитель называет сюжетный смысл одного из выражений, которое можно составить по тексту задачи, а дети составляют выражение, соответствующее данному сюжетному смыслу.

На данном этапе используются различные формы организации деятельности учащихся: фронтальная, парная, групповая, индивидуальная.

Основными методами работы учителя будет беседа, подводящий диалог, самостоятельная работа с последующей проверкой.

2 этап. Основной задачей учителя на данном этапе является введение понятия «основание для составления уравнения», введение алгоритма рассуждений и развернутой формы записи решения задачи алгебраическим методом.

Деятельность учащихся может быть организована по следующему плану.

1. Дать текст задачи.

2. Предложить обозначить через x неизвестную величину, значение которой требуется найти в вопросе задачи. Составить ряд выражений по тексту задачи и определить их сюжетный смысл.

3. Найти выражения с одним и тем же сюжетным смыслом. Сообщить детям, что если выражения, составленные по тексту одной и той же задаче имеют один и тот же сюжетный смысл, то они равны.

4. Составить равенство из двух выражений с одинаковым сюжетным смыслом, в одно из которых входит переменная x.

5. Вместе с детьми определить, что данная запись в математике называется уравнением.

6. Решить данное уравнение и установить, что значение x и есть ответ на вопрос задачи.

7. Сообщить детям, что сюжетный смысл выражений, которые мы использовали при составлении уравнений, будем называть основанием для составления уравнения, а метод решения задачи, который использовался в данном случае, в математике называют алгебраическим, поскольку для решения задачи мы использовали алгебраическое понятие – уравнение.

8. Далее детям предлагается решить еще одну задачу алгебраическим методом, запомнить алгоритм рассуждений и полную форму записи решения задачи алгебраическим методом.

9. Решив вторую задачу, учитель предлагает учащимся проверить правильность решения этой задачи. Предлагает вспомнить все известные детям способы проверки правильности решения задачи, которые использовались детьми ранее (составление и решение обратной задачи, решение задачи другим способом, прикидка результата и т.д.). Сообщает детям новый способ проверки правильности решения задачи, который используется в том случае, когда задача решается алгебраическим методом. Суть этого способа состоит в том, что по данной задаче

составляется уравнение по новому основанию. Если после решения этого уравнения получается то же самое значение *x*, что и в первом уравнении, то делается заключение о правильности решения задачи.

10. Сопоставляя решения задач, учитель в процессе фронтальной беседы с детьми обобщает алгоритм решения задач алгебраическим методом:

- обозначение буквой неизвестной величины;
- составление выражений;
- выбор основания для составления уравнения;
- составление уравнения;
- решение уравнения;
- проверка правильности решения задачи.

3 этап. Закрепление материала. Основные задачи этого этапа: обеспечить осознанное выполнение каждого пункта алгоритма решения задач АМ, постепенно увеличивая долю самостоятельности в его выполнении, перейти от развернутой записи всего процесса рассуждений к сокращенной, сформировать умение осуществлять самоконтроль и взаимоконтроль за правильностью выполнения каждого пункта плана.

Реализация задач, стоящих на данном этапе обучения решению задач алгебраическим методом, может быть достигнута путем использования следующих приемов:

– организация фронтальной беседы с использованием системы целесообразно подобранных вопросов, направленных на выявление степени осознанности действий, осуществляемых на каждом этапе алгоритма решения задач алгебраическим методом;

– организацию групповой работы, предполагающей поиск и защиту правильности проделанных группой действий приводящих к решению задачи алгебраическим методом;

– подбор постепенно усложняющихся заданий, обеспечивающих отработку всех действий, входящих в состав способа решения задач алгебраическим методом.

Значительное внимание на этом этапе уделяется составлению уравнений по различным основаниям к одной и той же задаче. Естественно, это доступно не для всех учащихся, поэтому такое задание следует предлагать для желающих с последующим рассмотрением со всеми учащимися. Нередко, составляя несколько уравнений к одной задаче, получаются такие виды уравнений, решение которых сложно для учащихся 1-4 классов. В этом случае не нужно требовать решения данного уравнения. Важно, что учащиеся смогли установить взаимосвязи между величинами, данными в задаче, перевести их на математический язык и записать их в виде уравнения.

В большей части образовательных программ обучения математике в начальной школе алгебраический метод решения задач не нашел широкого применения. Чаще всего дети знакомятся с этим методом в 3, 4 классах и называют его методом решения задач с помощью уравнений. Трудности, которые возникают у детей при усвоении данного метода, связаны со следующими причинами.

– Недостатком упражнений, готовящих детей к усвоению этого метода, а именно, заданий на составление различных выражений по сюжету задачи и выяснению их сюжетного смысла.

– Использованием АМ только для решения типовых задач, в которых четко указано на отношение равенства.

Например. «За 4 мотка белой шерсти уплатили 200 рублей. Сколько нужно уплатить за 6 мотков синей шерсти, если их цена одинаковая?»

– Составление только одного уравнения по задаче вышеназванного типа сдерживает понимание детьми общего принципа анализа и решения всех или, по крайней мере, достаточно широкого круга задач АМ.

В образовательной системе В.В. Давыдова алгебраический метод решения задач является основным. Как отмечают авторы, разрабатывающие программы по математике в данной образовательной системе обучения, введение такого подхода к анализу и решению задач связано с особым путем обучения, который вполне может быть представлен в виде следующих этапов.

– Формирование понятия о сравнении величин и умения отображать его результаты различными способами (рисунками, схемами, буквенными выражениями).

– Формирование умения делать особую краткую запись условия задачи.

– Обучение детей моделированию зависимостей величин в форме графической схемы.

Анализ работ учащихся позволяет в качестве типичных назвать следующие ошибки:

– неверное составление уравнения;

– ошибки в решении уравнения;

– подмена проверки правильности решения задачи проверкой правильности решения уравнения.

Причиной возникновения ошибок первой категории следует считать недостаточную продолжительность подготовительного этапа, где учащиеся должны научиться составлять различные выражения по тексту задачи и определять их сюжетный смысл.

Для детей с разными способностями к обобщению и скоростью усвоения материала на данном этапе должны быть подобраны задания с различной степенью формализации математических фактов, заданий.

Например: для детей со слабой способностью к обобщению можно использовать прием демонстрации явления, описываемого в задаче. С помощью дидактического материала провести разъяснительную работу по «введению» школьника в сюжет задачи, помочь ему представить, как этот сюжет мог бы протекать в реальной жизни, осознать взаимосвязь между величинами и способ перевода этих взаимосвязей на язык математических знаков.

Чтобы занять детей с быстрым темпом усвоения полезно предлагать им составлять несколько уравнений к одной задаче и затем проверить их правильность вместе с детьми всего класса.

Причиной ошибок третьей категории является недостаточная работа учителя по осознанию каждого пункта алгоритма решения задач алгебраическим методом или отсутствие обратной связи на каждом этапе формирования умения решать задачи алгебраическим методом.

Ниже предлагаются типы заданий, которые помогут учащимся осознать и воспринять все этапы решения задачи алгебраическим методом.

1. Прочитай рассказ. Определи сюжетный смысл каждого выражения, составленного по данному рассказу. Запиши выражения, которые еще можно составить по данному рассказу. Определи их сюжетный смысл. «Дети посадили 16 берез, 12 лип, 4 клена».

$16 + 12$; $12 - 4$; $12 + 4$; $16 : 4$; $12 \cdot 4$.

Какое выражение не имеет сюжетного смысла по данному рассказу?

2. «На столе лежало 8 тетрадей в клетку и 4 в линейку. Сколько всего тетрадей лежало на столе?» Выбери уравнения, которые можно считать решением данной задачи.

$8 - 4 = x$	$8 + 4 = x$	$x - 4 = 8$
$x + 4 = 8$	$x - 8 = 4$	$4 + x = 8$

3. «Купили 3 кг помидоров и 4 кг огурцов. Сколько килограммов овощей купили?»

Если через x обозначить «сколько всего килограммов овощей купили», то по данной задаче можно составить три уравнения:

$3 + 4 = x$ $\quad x - 3 = 4$ $\quad x - 4 = 3$

Соедини уравнение с тем предложением, которое является основанием для составления уравнения. Помни! Основание – это сюжетный смысл выражений, составленных по задаче и записанных в левой и правой части уравнения.

$3 + 4 = x$ – столько килограммов помидоров купили.

$x - 3 = 4$ – столько всего овощей купили.

$x - 4 = 3$ – столько килограммов огурцов купили.

4. Использование методов решения задач в различных программах по математике

Анализируя различные подходы обучения математики в начальных классах, можно отметить, что в экспериментальном курсе математики для начальных классов, составленном Г.Г. Микулиной [50], алгебраический метод решения задач является основным и единственным. Как отмечают авторы, введение такого подхода к анализу и решению задач связано и с особым путем обучения, который вполне можно представить в виде следующих этапов.

1 этап. Формирование понятия о сравнении величин и умения отображать его результаты различными способами (рисунками, схемами, буквенными формулами).

2 этап. Формирование умения делать особую краткую запись условия задачи.

3 этап. Обучение детей моделированию зависимостей величин в форме графической схемы.

4 этап. Обучение детей моделированию зависимостей величин в форме уравнения.

5 этап. Обучение детей применению способов анализа и моделирования текстов при решении серии усложняющихся задач.

В образовательной системе Л.В. Занкова [32] основным является арифметический метод решения задач. В третьем классе дети знакомятся с решением задач алгебраическим методом, и авторы рекомендуют убеждать учащихся в преимуществах алгебраического метода, но методика обучения данному методу в названной методической системе четко не выделена.

В начальных классах основным методом является арифметический метод решения задач. С алгебраическим методом, в соответствии с программой, дети знакомятся только в 3 классе, и используется он в основном только для решения простых задач или таких составных, в условии которых четко выражено отношение равенства, например: «За 4 мотка белой шерсти уплатили 20 рублей, сколько нужно уплатить за 6 мотков синей шерсти, если их цена одинаковая?». В учебнике для решения задачи алгебраическим методом дается образец рассуждений и записи решения, что конкретизирует процесс обучения решению задач этим методом.

Недостаточной является система упражнений, готовящая детей к усвоению этого метода, а именно: упражнений на составление различных выражений по сюжету задачи и выяснению их сюжетного смысла. С помощью алгебраического метода решаются только типовые задачи, в которых четко указано на отношение равенства и составляется по задачам такого типа только одно уравнение. Это сдерживает понимание детьми общего принципа анализа и решения всех или, по крайней мере, достаточно широкого круга задач алгебраическим методом.

Подводя итог данному разделу, отметим, что важнейшая и непреходящая задача школы – добиваться от учащихся глубокого и прочного усвоения содержания образования, которое в настоящее время включает не только предметные, но и метапредметные знания и умения. Все это требует глубокого осмысления учителем теоретических основ обучения, выбора стратегий обучения и выработки соответствующих методических умений.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите виды методов решения текстовых арифметических задач.
2. Сформулируйте особенности арифметического и алгебраического методов решения текстовых задач.
3. Перечислите и охарактеризуйте этапы формирования умения решать текстовые задачи алгебраическим методом.
4. Перечислите умения, которыми должен овладеть школьник, чтобы научиться решать задачи арифметическим методом.

Задания для самоподготовки

1. Ознакомьтесь с содержанием статьи Смолеусовой Т.В. Этапы, методы и способы решения задачи // Начальная школа. – 2003. – №12. Ответьте на следующие вопросы.

Как автор трактует понятия «метод решения задачи» и «способ решения задачи»?

С точки зрения трактовки автором метода решения задачи обоснуйте или опровергните возможность существования табличного метода решения задачи.

Указан ли автором общий принцип решения задачи алгебраическим методом?

Как автор статьи рекомендует обучать решению задач разными способами?

2. Заполните таблицу, указав виды методов и способов решения задачи, формы записи их решения и способы проверки правильности решения задачи (таблица 9).

Таблица 9

Методы решения задачи	Способы решения задачи	Формы записи решения задачи	Способы проверки правильности решения задач

3. На примере ниже данной задачи приведите пример рассуждений, которые следует проводить, решая задачу тем или иным методом.

Задача. Во второй корзине на 8 кг яблок больше, чем в первой и на 4 кг меньше, чем в третьей. В четвертой корзине яблок столько, сколько в первой и второй корзинах вместе. Сколько килограммов яблок в четырех корзинах вместе, если в первой корзине 20 кг?

4. Решите задачу разными способами. Приведите примеры рассуждений, которые должны проговаривать дети, выполняя тот или иной способ решения задачи.

Задача. Каменщик укладывает 4 000 кирпичей за 8 часов, а монтажник с помощью крана укладывает один блок, заменяющий 800 кирпичей за 16 минут. Во сколько раз меньше времени требуется монтажнику, чтобы уложить блоки, заменяющие 4 000 кирпичей?

Какие приемы можно использовать, чтобы помочь детям найти новый способ решения задачи?

Какие приемы используются с этой целью авторами учебников по математике для начальных классов?

5. Рассмотрите вариант дифференцированной работы с учащимися при обучении решению задач разными способами (Таблица 10).

Таблица 10

1 группа детей	2 группа детей	3 группа детей
Задача. В вазе лежало 5 желтых яблок и 2 зеленых. Три яблока съели. Сколько яблок осталось в вазе?	Та же, что и для 1 группы детей.	Та же, что и для 1 группы детей.
Решите задачу. Подумайте, можно ли ее решить другим способом?	Решите задачу двумя способами.	Измените задачу так, чтобы ее можно было решить тремя способами.

Приведите примеры своих заданий для реализации дифференцированного подхода при формировании умения решать задачи разными способами или методами.

6. Приведите примеры математических задач, которые можно использовать при формировании свойств арифметических действий.

7. Описать деятельность учащихся на всех этапах решения задачи: «В кинотеатре 300 мест. Сколько мест осталось свободными, если продано 90 билетов для взрослых, а для детей в 2 раза больше?» Выбор приемов обосновать.

8. Решить задачу шестью арифметическими способами: «Нужно перевести 540 т угля на трех машинах. За сколько дней это можно сделать, если на каждую машину грузить по 3 т и делать по 5 поездок в день?»

1.4. Технологии знакомства с понятием «составная задача»

План лекции

1. Роль задач в обучении математике в начальных классах
2. Показатели сформированности умения решать задачи
3. Приемы введения понятия «составная задача»
4. Классификация составных задачРоль задач в обучении математике

в начальных классах

В курсе математики начальной школы значительное место отводится решению задач. С помощью задач раскрывается целый ряд математических понятий (смысл арифметических действий, их свойства, устанавливается связь между компонентами и результатом действия, незаменимы задачи и для усвоения связи между величинами.) В то же время, задачи являются средством применения полученных знаний, через задачи дети учатся применять математические знания в жизненных ситуациях, знакомятся с математической символикой и методом моделирования.

Значительна роль задач в логическом развитии учащихся. Решая задачи, школьники постигают логику рассуждений, доказательность в рассуждениях, лаконичности в изложении и полноценной аргументации своих мыслей. Правильно организованное решение задач воспитывает сосредоточенность, внимательность, усидчивость, настойчивость к преодолению трудностей, формирует универсальные учебные действия.

В настоящее время, с распространением обобщенного приема обучения решению задач утеряна годами выверенная последовательность введения задач различной структуры (сначала простые, затем составные в два действия, затем в три и более действий). В то же время, решение составной задачи можно рассматривать как двух-трех шаговое действие. Следовательно, с позиции психологии и педагогики соблюдение постепенности в нарастании сложности текстов задач при формировании умения решать задачи совершенно уместно.

2. Показатели сформированности умения решать задачи

Составная задача вводится тогда, когда учитель убедится, что учащиеся овладели приемами решения ряда простых задач.

Показателями умения решать простые задачи и в то же время средством подготовки к решению составных задач являются умения детей выполнять следующие задания.

– К готовому условию подобрать вопрос (без указания того, каким действием должна решаться задача и с указанием такового).

– Умение из ряда заданных текстов выбрать те, которые являются задачей, и решить ее.

– По заданному вопросу составить простую задачу.

– Уметь подобрать недостающие данные к задаче.

– Составить задачу по заданному выражению.

– Умение обосновать выбор действия.

– Составить задачу по заданным числам.

Первый раз детям даются такие составные задачи, которые состоят из известных уже видов простых задач.

3. Приемы введения понятия «составная задача»

В методической литературе известны несколько подходов к формированию понятия «составная задача». Основные из них – аналитический и синтетический подходы к введению понятия составная задача.

Суть аналитического подхода заключается в том, что учитель предлагает детям составную задачу, с помощью совокупности вопросов и наглядной модели организует ее анализ, начиная от неизвестного числа задачи (обратный анализ). Дети подходят к выводу, что в задаче два неизвестных числа, следовательно, для ее решения нужно выполнить два действия. Этот подход широко используется в учебниках и в методических рекомендациях к учебникам для начальных классов.

Выбор аналитического пути авторы обосновывают следующим: этот путь ярче показывает специфику решения составных задач (нельзя сразу ответить на вопрос задачи, а также необходимость получить промежуточные данные).

Введения составной задачи аналитическим путем обычно проводится по следующему плану.

– Дается составная задача в два действия. Строится ее модель.

– Устанавливается, что сразу ответить на вопрос задачи нельзя, так как одно из чисел, позволяющих ответить на вопрос задачи, неизвестно.

– Определяется арифметическое действие, с помощью которого можно найти промежуточное неизвестное число. Записывается первое действие задачи в виде выражения, вычислив значение которого находят промежуточное неизвестное число.

– Устанавливается, что найденное в первом действии промежуточное число не позволяет ответить на вопрос задачи. Находится действие, с помощью которого можно найти второе неизвестное число. Записывается второе действие решения задачи.

– Определяется, что решение составной задачи закончено и записывается ее ответ.

Такой подход приводит к определению составной задачи как задачи, которая решается с помощью двух и более действий. Данное определение в большей степени характеризует процесс решения задачи и не дает представления о существенных признаках составной задачи.

Научное обоснование синтетическому подходу ознакомления с понятием «составная задача» дал Е.М. Семенов [77]. Содержание этого подхода проявляется в объединении двух простых задач, находящихся в отношении продолжения, в одну составную. Этот подход позволяет раскрыть существенные признаки составной задачи, а именно, ее составленность из нескольких простых.

Введение составной задачи синтетическим путем можно подразделить на отдельные этапы.

– Введение понятия «задача-продолжение» для исходной (данной) задачи.

– Практическое соединение исходной (данной) задачи и задачи-продолжения в составную задачу.

– Вывод правила синтезирования простых задач в составную задачу.

– Расчленение (анализ) составной задачи на простые как основная часть ее решения.

Раскроем эти этапы. Примерно за неделю перед введением понятия «составная задача» дать представление о задаче, которая является продолжением для данной задачи. Задачу называют продолжением для данной, если в ней сюжет данной задачи получает развитие, и ответ данной задачи входит в условие второй задачи, т.е. той, которую называют задачей-продолжением для данной.

Пример: «Аня нарисовала 5 яблок, а затем еще 2 яблока. Сколько всего яблок нарисовала Аня?»

Решение данной задачи: 5 + 2 = 7 (ябл.)

Ответ: Аня нарисовала 7 яблок.

Задача-продолжение для данной задачи: «Аня нарисовала 7 яблок, из них 4 она раскрасила. Сколько яблок ей осталось раскрасить?»

Познакомив детей с понятием «задача-продолжение» полезно некоторое время давать задания на составление задач-продолжений для данной задачи. Эти упражнения вызывают живой интерес у детей и вносят элементы творчества в их работу. А поскольку для решения задачи-продолжения нужно знать ответ на вопрос данной задачи, то у школьников появляется потребность в решении данной задачи. Важно и то, что составление задач-продолжений обогащает представление детей о возможности применения разнообразных сюжетов при самостоятельном составлении задач-продолжений. С большим интересом дети участвуют в игре «Кто не порвет цепочку задач-продолжений».

Практическое соединение исходной задачи и задачи-продолжения в одну составную полезно проводить с помощью наглядного пособия, предложенного Е.М. Семеновым (Рис. 4).

Исходная задача	Аня нарисовала 5 больших и еще 2 маленьких яблока
	Сколько всего яблок нарисовала Аня?
Задача-продолжение	Аня нарисовала 7 яблок.
	Из них 4 яблока она раскрасила.
	Сколько яблок ей осталось раскрасить?

Рис. 4

Продемонстрировать процесс объединения данной задачи и задачи-продолжения можно, выполнив следующие пошаговые операции.

1 шаг. Дать исходную задачу, закрыв остальную часть пособия.

2 шаг. Записать решение данной задачи.

3 шаг. Придумать задачу-продолжение к данной задаче. Дать возможность детям высказать свои варианты задач-продолжений. Затем предложить вариант задачи-продолжения, придуманный учителем. При этом открыть вторую часть пособия. Дети читают этот вариант задачи-продолжения и доказывают, что данная задача действительно является задачей-продолжением для исходной задачи.

4 шаг. Решить задачу-продолжение.

5 шаг. Продемонстрировать объединение данной задачи и задачи-продолжения.

Демонстрация объединения происходит путем сгибания по третьей и четвертой линиям в пособии. В процессе сгибания закрывается вопрос первой задачи и ответ на вопрос исходной задачи, который входит в условие задачи-продолжения, т. е. закрывается вопрос исходной задачи и первая строка условия второй задачи, которая является продолжением исходной. В результате получается текст составной задачи: «Аня нарисовала 5 больших и еще 2 маленьких яблока. Из них 4 яблока она раскрасила. Сколько яблок ей осталось раскрасить?» Дать название новой задаче. Она составлена из двух других, следовательно, и назвать ее разумно – составной.

6 шаг. Прочитать полученную составную задачу.

7 шаг. Решить составную задачу.

8 шаг. Сравнить решения составной задачи и двух простых задач, из которых составлена составная задача.

9 шаг. Сделать вывод о том, что составная задача получается путем соединения двух простых, и ее решение состоит из решения первой и второй простых задач.

С помощью этого пособия учащимся не трудно самостоятельно вывести правило объединения простых задач в составную задачу. Оно звучит так: «Чтобы объединить две простые задачи в одну составную, можно из исходной задачи исключить вопрос, а из задачи-продолжения ответ на вопрос исходной задачи». Далее упражнения на составление задач продолжений завершаются объединением данной задачи и задачи-продолжения в составную задачу с последующим решением составной задачи.

Правило объединения простых задач в составную задачу в последующем дополняется, поскольку в ряде составных задач, составленных из простых, известные числа задач могут повторяться, что влияет на корректность формулировки текста составной задачи. Сделать это можно следующим образом. Дать две задачи.

Задача 1. На первой полке 6 книг, а на второй на 3 книги больше, чем на первой. Сколько книг на второй полке?

Задача 2. На первой полке 6 книг, а на второй 9 книг. Сколько всего книг на двух полках?

Замечаем, что вторая задача является продолжением первой. Исключив вопрос из первой задачи и ответ на него из второй, замечаем, что в условии второй задачи повторяется одно из чисел (6 книг), входящих и в первую задачу. После такой работы предыдущее правило дополняется (Из задачи-продолжения нужно исключить ответ на вопрос данной задачи, а также повторяющиеся данные, если такие окажутся).

Следует использовать данное пособие и для обучения детей прямому анализу составных задач, т. е. для расчленения составной задачи на простые. В этом случае детям предлагается свернутое пособие и, по мере того как дети выделяют первую, а затем и вторую простую задачи, появляются их тексты, путем разворачивания пособия. Данный прием очень оживляет работу учащихся и является одним из способов проверки их действий. Сам анализ составной задачи полезно выполнять, придерживаясь следующей последовательности вопросов.

1. Какая задача по составу? – (Составная)

2. Почему так думаешь? – (Состоит из нескольких простых)

3. Выдели первую простую задачу.

4. Каким действием ее можно решить?

5. Почему?

6. Выделите вторую простую задачу?

7. Каким действием ее можно решить?

8. Почему?

9. Ответили мы на вопрос задачи? – (Если нет, то вопросы повторяются, если да, то формулируется ответ).

При знакомстве с составной задачей могут быть использованы и другие методические приемы [12; 31].

1. Прием рассмотрения простой задачи с последующим изменения ее вопроса и преобразованием ее в составную.

Например.

Задача. Столяр сделал 8 табуреток, а стульев – на 3 меньше, чем табуреток. Сколько стульев сделал столяр?

После ее решения, учитель предлагает детям ответить на второй вопрос по тому же условию: сколько всего изделий сделал столяр? Далее, сравнивая ответы на оба вопроса, устанавливают их иерархию (необходимую последовательность), приходя к выводу, что постановка второго вопроса (Сколько всего изделий?) требует сначала ответить на первый вопрос (Сколько стульев сделал столяр?).

Таким образом, получается задача в два действия, которую называют составной.

2. Прием рассмотрения сюжета с действием, рассредоточенным во времени.

Например, дается задача. «В вагоне было 16 пассажиров. На первой остановке вошли 14 пассажиров, а на второй – еще 10. Сколько пассажиров стало в вагоне?»

При анализе текста педагог обращает внимание учащихся на то, что входили и выходили пассажиры не одновременно, а на разных остановках. Поэтому для ответа па вопрос задачи нужно выполнить два действия: 1)16 + 14= 30(п.), 2)30+ 10 = 40 (п.) После того, как задача решена, полезно сравнить ее с простой задачей следующего содержания «В вагоне было 16 пассажиров, на остановке вошло еще 24 пассажира. Сколько пассажиров стало в вагоне?». Предложить отметить отличия в условиях этих двух задач. После решения простой задачи можно обсудить вопрос: почему в обеих задачах получены одинаковые ответы?

3. Прием рассмотрение задач с недостающими или лишними данными.

Например, задача**.** «В стопке лежало 6 тетрадей в клетку и 5 в линейку. Взяли 1 тетрадь в линейку. Сколько тетрадей в линейку осталось?»

Анализ текста показывает, что одно из данных задачи лишнее – 6 тетрадей в клетку. Для ответа на вопрос оно не нужно. После решения задачи учитель предлагает внести в текст задачи такие изменения, чтобы это данное понадобилось, что приводит к составной задаче: «В стопке лежало 6 тетрадей в клетку и 5 в линейку. Из стопки взяли 1 тетрадь. Сколько тетрадей осталось в стопке?»

Эти изменения условия повлекут за собой необходимость выполнения двух действий: (6 + 5) – 1. (При этом полезно рассмотреть и разные способы решения задачи, уточняя, какую тетрадь могли взять $(6-1)+5$ или (5 – 1)+ 6). Таким образом, простая задача может быть достроена до составной.

4. Классификация составных задач

Одной общепринятой классификации составных задач не существует. В методике обучения математике принято выполнять классификацию по разным основаниям.

– По числу арифметических действий (задачи в два, три и т.д. действий).

– По конкретному сюжетному действию (задачи на движение, на нахождение площади, на нахождение периметра, на время, на работу, на куплю-продажу и т.д.).

– По отношению к тому или иному разделу математики (задачи на зависимость между величинами, комбинаторные задачи, логические задачи).

– По математической структуре содержания задачи (составные типовые и нетиповые задачи).

К типовым составным задачам относят следующие виды.

1. На пропорциональное деление.
2. На нахождение числа по двум разностям.
3. Задачи на нахождение четвертого пропорционального.

– Задача 1. «С одного поля собрали 4 мешка картофеля массой 192 кг. С другого – 6 таких же мешков. Какова масса мешков с картофелем, собранных с другого поля?»

– Задача 2. С одного поля собрали 4 мешка картофеля, со второго – 6 таких же мешков. Масса всего собранного картофеля – 480 кг. Какова масса картофеля собранного с каждого поля?

– Задача 3. С одного поля собрали 4 мешка картофеля, со второго – 6 таких же мешков. Какова масса картофеля, собранного с каждого поля, если со второго поля собрали на 96 кг больше, чем с первого?

Задания для самоподготовки

1. Определите, какая задача относится к названным выше видам типовых составных задач.

Задача 1. С одной и той же станции в одно и то же время вышли в противоположных направлениях два поезда. Скорость одного поезда 50 км/ч, а другого 85 км/ч. Какое расстояние будет между поездами через 3 часа?

Задача 2. За рубашку и галстук заплатили 40 р. Рубашка дороже галстука в 4 раза. Сколько стоит галстук?

Задача 3. В первой пачке было на 10 тетрадей больше, чем во второй, а всего 70 тетрадей. Сколько тетрадей было во второй пачке?

Задача 4. В двух комнатах было 56 человек. Когда в первую пришли ещё 12 человек, а во вторую – 8 человек, то людей в комнатах стало поровну. Сколько человек было в каждой комнате первоначально?

Задача 5. Для санатория купили 12 кресел и 50 стульев на общую сумму 9880 руб. Сколько стоит одно кресло, если один стул стоит 86 руб.?

2. Приведите примеры задач на зависимость между величинами. Дайте им название. Решите арифметическим и алгебраическим методами.

3. Разработайте конспект урока по теме: «Формирование понятия составная задача».

4. Рассмотрите каждую из ниже данных задач, сделайте к каждой задаче графическую и символическую модель. Сравните тексты и модели задач. В чем ценность такой совокупности задач? Преобразуйте каждую задачу в составную. Постройте модель составленной составной задачи.

Задача 1. У Кати 6 цветных карандашей и 2 простых. Сколько карандашей у Кати?

Задача 2. Маша отдала 6 конфет Даше и 2 конфеты Пете, после чего конфет у нее не осталось. Сколько конфет отдала Маша?

Задача 3. Ваня отдал 2 тетради Маше, после чего у него осталось 6 тетрадей. Сколько тетрадей было у Вани?

Задача 4. У Гриши 6 солдатиков, а у Сережи на 2 солдатика больше, чем у Гриши. Сколько солдатиков у Сережи?

Задача 5. У Гриши 6 солдатиков, их на 2 меньше, чем у Сережи. Сколько солдатиков у Сережи?

Задача 6. Гриша играл с Ваней в морской бой. Шесть партий он выиграл, а 2 проиграл. Сколько партий сыграли Гриша с Ваней?

Задача 7. В корзину с яблоками добавили 6 яблок. После того как несколько яблок взяли, в корзине осталось на 2 яблока меньше, чем было первоначально. Сколько яблок взяли?

3.5. Обучение решению задач на зависимость между величинами

План лекции

1. Общее представление о задачах на зависимость между величинами
2. Этапы изучения задач на зависимость между величинами
3. Повторение и анализ задач на зависимость между величинами
4. Типовые задачи на зависимость между величинами
5. Преобразования типовых задач на зависимость между величинами
6. Способы решения задач на нахождение четвертого пропорционального

7. Задачи на пропорциональное деление и на нахождение числа по двум разностям

1. Общее представление о задачах на зависимость между величинами

В методике обучения математике нет общепринятой классификации составных задач, но в методике трудно формулировать рекомендации по решению задач, не определив объем задач рассматриваемой группы. Поэтому методисты, не претендуя на исчерпывающий характер классификации составных задач, пользуются упрощенной схемой, выделяя группы задач по разным признакам.

Как мы уже отмечали в предыдущем параграфе, принято выполнять классификацию задач по числу арифметических действий, с помощью которых решается задача, по области математического знания, к которой относятся задачи, по сюжету, описанному в задаче и т.д.

В данном случае мы будем придерживаться точки зрения Н.Ф. Талызиной [89] и для выделения интересующей нас группы задач возьмем не сюжет, а особенности отношений величин, представленных в тексте задачи. Рассмотрим особенности обучения решению задач на зависимость между величинами.

Три величины называют взаимосвязанными, если они описывают одно жизненное явление и значение одной из них равно значению произведения двух других величин.

Изучая тройки взаимосвязанных величин, дети знакомятся с прямо пропорциональной и обратно пропорциональной зависимостью между величинами, которая формулируется следующим образом.

– Если с увеличением (уменьшением) значения одной из величин, значение второй увеличивается (уменьшается) во столько же раз при постоянном значении третьей величины, то такую зависимость называют прямо пропорциональной.

– Если с увеличением (уменьшением) значения одной из величин, значение второй уменьшается (увеличивается) во столько же раз при постоянном значении третьей величины, то такую зависимость называют обратно пропорциональной.

В начальных классах в соответствии с современным стандартом [62] дети учатся решать задачи, содержащие зависимость, характеризующую различные процессы. Среди них выделяют задачи на движение (скорость, время, пройденный путь); на работу (производительность труда, время, объем всей работы); изготовления товара (расход на 1 предмет, количество предметов, общий расход); расчет стоимости (цена, количество, общая стоимость товара) и т.д.

Базовый уровень усвоения этого раздела предполагает, что дети научатся [62]:

– моделировать изученные зависимости;
– находить и выбирать способ решения текстовых задач;
– выбирать удобный способ решения задачи;
– планировать решение задачи;
– действовать по заданному и самостоятельно составленному плану решения задачи;
– объяснять (пояснять) ход решения задачи;
– использовать геометрические образы для решения задачи;
– обнаруживать и устранять ошибки логического (в ходе решения) и арифметического (в вычислении) характера;
– наблюдать за изменением решения задачи при изменении ее условия.

С отдельно взятыми величинами дети встречаются в первом классе и решают задачи, оперируя значениями одной величины (количество, длина, стоимость, расстояние).

Во втором и последующих классах после знакомства с умножением и делением ведется целенаправленная работа с тройками взаимосвязанных величин. Начинается эта работа с наиболее знакомой детям ситуации, которую в современной методической литературе называют «расчет стоимости» или «купля – продажа» товара. Данная практическая ситуация связана с тройкой величин: цена, количество, стоимость.

При формировании представлений о каждой из названных троек взаимосвязанных величин учитываются их специфические особенности, степень знакомства школьников с ними в реальной жизненной ситуации. В процессе формирования целесообразно ориентироваться на определенные этапы, общие для всех троек взаимосвязанных величин. Единство этапов формирования обусловлено общностью отношений между величинами, представленными в условии задач, а различия в сюжетной линии текстов задач позволяет подходить к этим большим классам арифметических задач как к разновидностям задач одного и того же рода.

2. Этапы изучения задач на зависимость между величинами

При изучении задач на тройки взаимосвязанных величин выделяются следующие этапы.

1. Проигрывание того явления, которое описывается с помощью изучаемой тройки величин (максимальная опора на жизненный опыт обучающихся).

2. Составление простых задач с опорой на выполнение практических действий, связанных с этой тройкой величин.

3. Введение названий взаимосвязанных величин, их буквенных обозначений (если это предусмотрено программой). Уточнение единиц измерения каждой величины, входящей в изучаемую тройку взаимосвязанных величин.

4. Знакомство с моделями задач нового вида (краткая запись, табличная и графическая модели).

5. Отработка понятия «зависит» и «как зависит». Установление зависимости между величинами через обобщение решения простых задач (прямо пропорциональная и обратно пропорциональная).

6. Ведение формулы, отражающей основную зависимость между величинами и вывод из нее двух других формул (ц · к = с; ц = с : к; к = с : ц).

7. Запоминание правил нахождения значения неизвестной величины по двум известным значениям величин.

8. Обучение обоснованию выбора действия при решении простых задач на зависимость между величинами (с опорой на правило нахождения значения неизвестной величины по двум известным значениям величин).

9. Введение составных задач на зависимость между величинами, где явление будет протекать дважды.

10. Обучение прямому и обратному анализу задач такого типа (повышенный уровень).

11. Знакомство и решение типовых задач на зависимость между величинами:

– задачи на нахождение четвертого пропорционального;
– задачи на пропорциональное деление;
– задачи на нахождение величины по двум разностям.

12. Составление задач на зависимость между величинами и установление общности в анализе и решении задач на зависимость между величинами с различным сюжетом (повышенный уровень).

Установлено, что точность и лаконичность вопросов учителя при повторении и анализе задач на зависимость между величинами вырабатывает у детей единый подход к анализу задач этой группы и способствует формированию умения самостоятельно проводить анализ любых задач. Многословность и отсутствие системы в повторении и анализе задач затрудняет формирование такого компонента общего приема решения задач как их анализ. Дети ждут вопроса учителя, а дома вопроса родителя, чтобы осознать текст задачи. Постановка вопросов к тексту задачи – это универсальное учебное действие, компонент общего приема решения задач. Научить детей ставить вопросы по содержанию текста задачи, соответствующие анализу и исследованию задачи – важнейшая задача учителя на современном этапе.

Практика показывает, что успешное решение задач данного типа предполагает уверенное знание зависимостей между тремя величинами. Важно, чтобы у учащихся сформировались правильные понятия о каждой из этих величин и их зависимостях.

3. Повторение и анализ текста задач на зависимость между величинами

Этап повторения в задаче на зависимость между величинами проводится по следующему плану.

- О чем говорится в задаче?
- Сколько раз протекало явление, описанное в задаче?
- Какие величины используются в задаче?
- Значения каких величин известно в задаче?
- Значение какой величины надо найти?

Повторение текста задачи может сопровождаться записью задачи в таблицу или построением графической модели.

Прямой анализ текста задачи.

- Какая задача по составу?
- Выделите первую простую задачу.
- Каким действием она решается?

– Почему?

– Запишите решение первой простой задачи.

– Ответили мы на вопрос составной задачи? (Если ответ «нет», то по такому же плану выделяется вторая простая задача. Если ответ «да», то предлагается сформулировать план решения задачи.)

Рассмотрим пример повторения и анализа составной задачи на зависимость между величинами.

Задача. «Из 24 метров ситца можно сшить 8 одинаковых наволочек. Сколько таких же наволочек можно сшить из 18 метров ситца?»

– О чем говорится в задаче? (О наволочках, которые шили из ситца.)

– Сколько раз протекало явление, описанное в задаче? (Два раза, значит, в таблице будет две строки.)

– Какие величины используются в задаче? (Расход ткани на 1 наволочку, количество наволочек и общий расход ткани.)

– Значения, каких величин известно в задаче? (Известен общий расход ткани в первый и второй разы и количество сшитых наволочек в первый раз.)

– Значение, какой величины надо найти? (Нужно узнать количество наволочек, сшитых во второй раз.)

– Что говорится про расход ткани на 1 наволочку? (Наволочки одинаковые, значит, одинаковый расход ткани на 1 наволочку.)

Повторение текста задачи сопровождается построением и заполнением табличной модели задачи (Таблица 11).

Таблица 11

	расход ткани на 1 наволочку	количество сшитых наволочек	общий расход ткани
1 раз	одинаковый	8 нав.	24 м
2 раз		?	18 м

– Какая задача по составу? (Составная, т.к. состоит из нескольких простых.)

– Выделите первую простую задачу. («Из 24 метров ситца можно сшить 8 одинаковых наволочек. Сколько метров ткани пойдет на одну наволочку?»)

– Каким действием она решается? (Делением.)

– Почему? (Чтобы найти количество наволочек, надо общий расход ткани разделить на расход ткани на 1 наволочку.)

– Запишите решение первой простой задачи.

(24 : 8 = 3 (м на 1 нав.))

– Ответили мы на вопрос составной задачи? (Нет)

– Выделите вторую простую задачу. («Сколько наволочек можно сшить из 18 метров ситца, если на каждую наволочку идет по 3 метра ткани?»)

– Каким действием она решается? (Делением.)

– Почему? (Чтобы найти количество сшитых наволочек, надо общий расход ткани разделить на расход ткани на 1 наволочку.)

– Запишите решение второй простой задачи.

(18 : 3 = 6 (нав.))

– Ответили мы на вопрос составной задачи? (Да)

– По какому плану мы решали задачу?

План.

Первым действием мы узнали, сколько ткани идет на одну наволочку.

Вторым, сколько таких же наволочек можно сшить из 18 метров ситца.

– Скажите полный ответ задачи. (Из 18 м ситца можно сшить 6 наволочек.)

4. Типовые задачи на зависимость между величинами

Среди множества составных задач на зависимость между величинами выделяется группа типовых задач этого рода. К типовым составным задачам на зависимость между величинами относят задачи:

– на нахождение четвертого пропорционального;
– на пропорциональное деление;
– на нахождение числа по двум разностям.

Приведем примеры задач каждого типа.

Задача на нахождение четвертого пропорционального. «С одного поля собрали 4 мешка картофеля массой 192 кг. С другого – 6 таких же мешков. Какова масса мешков с картофелем, собранных с другого поля?»

Задача на пропорциональное деление. «С одного поля собрали 4 мешка картофеля, со второго – 6 таких же мешков. Масса всего собранного картофеля – 480 кг. Какова масса картофеля собранного с каждого поля?»

Задача на нахождение числа по двум разностям. «С одного поля собрали 4 мешка картофеля, со второго – 6 таких же мешков. Какова масса картофеля, собранного с каждого поля, если со второго поля собрали на 96 кг больше, чем с первого?»

Данные задачи ценны с той точки зрения, что они позволяют использовать приемы, необходимые для формирования логических и познавательных универсальных учебных действий: сравнение, сопоставление, обобщение, преобразование, конструирование и т.д. Также они способствуют выработке привычки вчитываться в текст задачи и работать с информацией, заложенной в тексте задач. Само решение задач также присутствует в этом процессе, но оно становится второстепенным. На первое место выдвигается мотив поиска, преобразования и исследования. Именно эти побудительные мотивы позволяют удерживать интерес к работе над задачей и оказывают обучающее воздействие.

5. Преобразования типовых задач на зависимость между величинами

Одна из технологий формирования умения решать задачи указанных видов предусматривает следующую последовательность действий.

Знакомство с задачами выше указанных видов можно начать с выявления их характеристических особенностей. Для этого можно сравнить тексты двух задач одного вида, представленные в виде табличной модели.

Задача 1. «За 6 ручек заплатили 180 рублей. Сколько будет стоить 9 таких ручек?»

Задача 2. «40 кг печенья расфасовали в 5 одинаковых ящиков, сколько килограммов печенья можно упаковать в 12 таких же ящиков?»

Устанавливаем, чем похожи тексты задач, чем они отличаются (Таблицы 12, 13).

Таблица 12

	Цена	Количество	Стоимость	Решение задачи
1 покупка	одинаковый	6 шт.	180 р.	180 : 6 · 9 = 270 (р.)
2 покупка		9 шт.	?	

Таблица 13

	Масса 1 ящ.	Количество	Общая масса	Решение задачи
1раз	одинаковый	5 ящ.	40 кг	40 : 5 · 12 = 96 (кг)
2раз		12 ящ.	?	

Выделяем характеристические особенности задач на нахождение четвертого пропорционального.

– Двукратное повторение явления.

– Наличие трех взаимосвязанных величин, описывающих какое-либо жизненное явление.

– Одна из величин имеет одинаковое значение в первый и второй раз протекания (выполнения) описанной ситуации.

– Другая величина имеет два известных значения.

– У третьей величины одно значение известно, а второе нужно найти.

Сравниваем решение этих задач. И формулируем план решения.

Находим значение той величины, у которой оно одинаковое в 1-ый и 2-ой раз.

Находим ответ на вопрос задачи.

Далее полезно установить, что у задач на нахождение четвертого пропорционального, «одинаковое» значение может быть у любой из трех величин и план решения от этого не меняется.

Для получения такого вывода можно дать несколько задач (4 или 5). Предложить сначала выбрать из этой группы только задачи на зависимость между величинами. Затем, из оставшихся выбрать задачи на нахождение четвертого пропорционального и обосновать свой ответ с опорой на характеристические особенности задач этого вида. Выполнить модель выбранных задач в виде таблицы. Сравнить их и сделать выше данный вывод.

Анализируем тексты задач и выбираем задачи на пропорциональное деление (Таблица 14).

Таблица 14

№	Текст задачи	На пропорциональное деление?	Почему?
1	Из двух городов, расстояние между которыми 760 км, одновременно отправляются навстречу друг другу два поезда, один со скоростью 50 км/ч, а другой со скоростью 45 км/ч. Через сколько часов они встретятся?	Нет	Характеристические особенности задачи на пропорциональное деление не выполняются
2.	40 кг печенья расфасовали в 5 одинаковых ящиков, сколько килограммов печенья можно упаковать в 12 таких же ящиков?	Да	Характеристические особенности задачи на пропорциональное деление выполняются
3.	Первый слесарь изготовил 140 деталей, делая по 5 деталей в час. Сколько деталей изготовит второй слесарь за это же время, если в час он изготавливает 7 деталей?	Да	Характеристические особенности задачи на пропорциональное деление выполняются
4.	Для детского сада купили 4 куклы по 160 рублей за каждую и машинку за 85 рублей. Сколько стоит покупка?	Нет	Характеристические особенности задачи на пропорциональное деление не выполняются
5.	В одном хозяйстве для коров и лошадей заготовили по одинаковому количеству центнеров сена. Для коров в день расходуют 8 ц сена, а для лошадей 4 ц сена. На сколько дней хватит заготовленного сена коровам, если лошадям хватит заготовленного сена на 200 дней?	Да	Характеристические особенности задачи на пропорциональное деление выполняются

Выполняем табличные модели задач на пропорциональное деление (Таблицы 15, 16, 17).

Таблица 15

	Масса 1 ящ.	Количество	Общая масса	Решение задачи
1раз	одинаковая	5 ящ.	40 кг	40 : 5 = 8 (кг в ящ.)
2раз		12 ящ.	?	$8 \cdot 12 =$ 96 (кг)

Таблица 16

	Производи-тельность	Количество	Общая выработка	Решение задачи
1слесарь	5 дет. в ч	одинаковое	140 дет.	140 : 5 = 28 (ч)
2слесарь	7 дет. в ч		?	$7 \cdot 28 =$ 196 (дет.)

Таблица 17

	Расход сена	Количество	Общий расход сена	Решение задачи
Для лошадей	4 ц в день	200 дн.	Одинаковый	$4 \cdot 200 =$ 800 (ц)
Для коров	8 ц в день	?		800 : 8 = 100 (дн.)

Сравниваем три задачи на нахождение четвертого пропорционального. Делаем вывод, что любая из величин может иметь «одинаковое» значение в 1-ый и 2-ой раз. Уточняем вторую часть вывода, что план решения задач этого вида не меняется. В решении каждой задачи устанавливаем, что находим с помощью первого и второго действия, при этом не затрагиваем сюжет задачи, а опираемся только на ее математическую структуру. Подтверждаем, что первым действием у каждой задачи находим значение той величины, у которой эти значения одинаковые, но выбор действия, с помощью которого мы это значение находим, осуществляется на основании правила на нахождение этой величины. Так в первых двух задачах мы это делали с помощью действия деления, а в третьей задаче с помощью действия умножения. Вторым действием находим значение величины, о которой спрашивается в задаче. И вновь действия, с помощью которых решается задача, выбираем по правилу нахождения неизвестной величины.

Продолжая исследовать задачи этого вида полезно выбрать одну из выше данных задач и составить к ней 6 задач этого же вида, провести наблюдение за их решением и подтвердить верность правила решения задач этого вида.

Например, возьмем вторую задачу из выше предложенных и запишем в таблицу все 6 вариантов преобразования этой задачи и детям предложим составить тексты по заданной табличной модели задачи (Таблицы 18-23).

Таблица 18

	Производи-тельность	Количество	Общая выработка	Решение задачи
1слесарь	5 дет. в ч	одинаковое	140 дет.	140 : 5 = 28 (ч) $7 \cdot 28$ = 196 (дет.)
2слесарь	7 дет. в ч		?	

Таблица 19

	Производи тельность	Количество	Общая выработка	Решение задачи
1слесарь	5 дет. в ч	одинаковое	140 дет.	140 : 5 = 28 (ч) 196 : 28 = 7 (дет. в ч)
2слесарь	?		196 дет.	

Таблица 20

	Производи-тельность	Кол-во	Общая выработка	Решение задачи
1слесарь	одинаковая	28 ч	140 дет.	140 : 28 = 5(дет. в ч) 196 : 5 = 399 (ч) и еще 1 деталь будет сделана на 40-ом часе работы
2слесарь		?	196 дет.	

Таблица 21

	Производи-тельность	Количество	Общая выработка	Решение задачи
1слесарь	одинаковая	28 ч	140 дет.	140:28 = 5 (дет. в ч) $5 \cdot 39$ = 195 (дет.)
2слесарь		39 ч	?	

Таблица 22

	Производи-тельность	Количество	Общая выработка	Решение задачи
1слесарь	5 дет. в ч	28 ч	одинаковая	$5 \cdot 28$ = 140 (дет.) 140 : 7 = 20 (ч)
2слесарь	7 дет. в ч	?		

Таблица 23

	Производи-тельность	Количество	Общая выработка	Решение задачи
1слесарь	5 дет в ч	28 ч	одинаковая	$5 \cdot 28$ = 140 (дет.) 140 : 20 = 7 (дет. в ч)
2слесарь	?	20 ч		

6. Способы решения задач на нахождение четвертого пропорционального

Умение находить разные способы решения задач и выбирать из них наиболее удобный входит в состав необходимых формируемых универсальных действий. В связи с этим, целесообразно познакомить обучающихся со способами решения задач рассматриваемого типа.

С п о с о б   п р я м о г о   п р и в е д е н и я   к   е д и н и ц е наиболее распространенный и универсальный. Его можно применить для любой задачи названного типа. Именно он использовался нами в предыдущих рассуждениях для решения задач этого типа. Способ опирается на знание правила нахождения неизвестной величины по известным значениям двух других величин в тройке взаимосвязанных величин.

Для задач этого типа существует еще, по меньшей мере, два способа, которые подходят не для любой задачи этого типа, а лишь для тех, где числовые значения величин и сюжетные особенности задачи позволяют ими воспользоваться. Рассмотрим эти способы.

Способ обратного приведения к единице.

Задача. «Рабочий за восьмичасовой рабочий день изготавливает 24 детали. Сколько времени ему потребуется для изготовления 48 деталей, если он будет работать с той же производительностью?» Выполним табличную модель задачи.

Таблица 24

Производительность	Количество	Общий объем работы
одинаковая	8 ч	24 дет.
	?	48 дет.

Первая логически законченная часть текста задачи «за 8 часов изготавливает 24 детали» позволяет сформулировать два логических заключения.

1. Можно узнать, сколько деталей изготавливает рабочий за час?

– 24 дет. : 8 ч = 3 (дет. в ч)

2. Можно узнать, сколько времени требуется для изготовления одной детали?

– 8 ч : 24 дет. = 480 мин : 24 дет. = 20 мин

Первое рассуждение приводит нас к способу решения, который называют прямым приведением к единице, второе рассуждение – к способу обратного приведения к единице. В первом случае мы узнаем количество деталей на единицу времени, во втором – количество времени на единицу изделия.

Рассмотрим полное решение задачи двумя способами (Таблица 25).

Таблица 25

Способ прямого приведения к единице	Способ обратного приведения к единице
1. 24 : 8 = 3 (дет. в ч) 2. 48 : 3 = 16 (ч)	1. 8 : 24 = 480 : 24 = 20 (мин) 2. 20 · 48 = 960 (мин) или 960 : 60 = 16 (ч)

В данной задаче способ обратного приведения к единице требует преобразования единиц измерения времени. И поскольку первое число изначально меньше второго (8 ч : 24 дет.), то дети не сразу видят этот способ.

Способ, опирающийся на кратное отношение между двумя известными значениями величин.

Обратимся к табличной модели рассматриваемой задачи. Если числа небольшие, то сразу можно увидеть, что во второй раз общий объем деталей, которые надо изготовить, в 2 раза больше, чем в первом случае (48 дет. : 24 дет. = 2 (раза)) Далее делаем вывод, что и времени на изготовление деталей во второй раз потребуется в 2 раза больше. Такие рассуждения приводят к новому способу решения задачи.

1. 48 : 24. = 2 (раза) – во столько раз больше надо изготовить деталей во второй раз.

2. 8 · 2 = 16 (час) – столько часов потребуется на изготовление 48 деталей.

7. Задачи на пропорциональное деление и задачи на нахождение числа по двум разностям

Обучение решению задач этих видов описано во многих пособиях. В основном предлагается вводить эти задачи раздельно. Возможен и другой подход, когда тексты этих задач не даются в готовом виде, а конструируются самими детьми, когда дети выделяют существенные признаки задач определенного вида и далее работают с задачей как с математическим понятием, оперируя характеристикой задач как существенными признаками. Когда дети учатся свободно переходить от одной модели задачи к другой, когда, проведя содержательное сравнение, они формулируют выводы, оперируя математической терминологией. Именно такой подход, на наш взгляд, задействует весь набор логических универсальных действий.

Полезно начать работу с конструирования текстов задач этих видов. Последовательность методических действий учителя может быть следующей.

1. Решить задачу на нахождение четвертого пропорционального.

2. Исследуя решение этой задачи внести найденное значение в таблицу.

3. Используя значения величин в полученной таблице предложить составить всевозможные простые задачи, а затем и составные.

4. Если дети не составят нужные учителю тексты задач, то сам учитель предлагает табличные модели задач рассматриваемых видов и предлагает сформулировать тексты задач по заданным моделям. Начало текстов задач можно дать на слайдах и по мере формулировки текста задачи детьми, появляется полный текст задачи на слайде.

5. Тексты задач сравниваются и сопоставляются с текстом задачи на нахождение четвертого пропорционального. Акцентируется внимание на решении задачи этого вида.

6. Дети подводятся к решению задач нового вида либо с помощью наводящих вопросов учителя, либо им предлагается готовое решение одной из задач, например, на пропорциональ-

ное деление, а решение задачи на нахождение числа по двум разностям предлагают сами дети.

7. Дети выбирают из предложенных на листочках текстов задачи нового вида. Выделяют их особенности и самостоятельно решают их с последующей проверкой по готовому образцу.

Дальнейшая работа сводится к использованию задач данного типа для отработки общего приема решения задач. С этой целью используются приемы, направленные на применение и коррекцию таких компонентов общего приема решения задач как построение моделей задач, анализ задач, проверку правильности решения задач. Активнее следует использовать приемы конструирования и выбора задач по заданным параметрам, сравнение, преобразование и классификацию задач.

Дефицит времени не всегда позволяет проводить полный цикл работы над задачей. В этом случае полезно выполнять только часть решения.

Целью такой работы может быть формирование умения выполнять определенный этап решения.

Примеры заданий.

1. Прочитай задачу и представь ее сюжет. Расскажите, что вы представили?
2. Сделай рисунок (чертеж) к задаче. Докажи, что модель соответствует тексту задачи.
3. Пользуясь схемой анализа задачи от вопроса к данным, составь план решения задачи.
4. Известно, что данная задача решается так… (дается решение задачи по действиям). Запиши это решение в виде выражения, найди его значение и запиши ответ задачи.
5. Проверь, правильно ли решена эта задача, определив смысл каждого действия (решив задачу другим способом, решив задачу графически).

Полезно для осмысления решения задачи проводить работу над уже решенной задачей, используя задания следующих видов.

1. Изменение условия задачи так, чтобы задача решалась другими действиями.

2. Постановка нового вопроса к уже решенной задаче (всех вопросов, которые можно найти по данному условию или его части).

3. Решение задачи другим способом или методом.

4. Изменение числовых данных задачи так, чтобы появился новый способ решения задачи или чтобы один из способов решения стал невозможен.

5. Обоснование правильности решения задачи (проверка решения любым из известных способов).

6. Исследование решения. Сколько способов решения имеет задача? При каких условиях не будет иметь решения? Какие приемы наиболее целесообразны для поиска решения? Возможны ли другие методы решения задачи?

7. Сравнение текстов и решений 2-х или более задач.

Обучая решению задач, будем помнить, что нет и не может быть, раз и навсегда принятого алгоритма работы с задачами на уроке.

Вид и форма организации познавательной деятельности детей при решении задач полностью зависит от цели, для достижения которой задача включена в урок.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры задач на зависимость между величинами и назовите вид каждой задачи.

2. Перечислите этапы изучения задач на зависимость между величинами.

3. Какие задачи на зависимость между величинами относятся к типовым задачам?

4. Какие способы решения задач на нахождение четвертого пропорционального вам известны? Приведите примеры решения задач каждым из способов.

5. Перечислите виды работы над уже решенной задачей.

6. С какой целью будем давать задания по выполнению только части решения задачи?

Задания для самоподготовки

1. Дайте общее название для всех ниже представленных задач.

Определите вид каждой составной задачи, если это возможно, составьте различные виды моделей этих задач. Выберите наиболее информативную модель.

Задача 1. «На автозаправке первый водитель залил 20 литров бензина, а второй 40 литров такого же бензина. Первый заплатил на 180 рублей меньше, чем второй. Сколько заплатил за бензин каждый водитель?»

Задача 2. «Машинистка напечатала 120 страниц за 4 часа. Сколько страниц машинистка напечатает за 6 часов, работая с той же скоростью?»

Задача 3. «Из 24 метров ситца сшили 8 одинаковых сорочек. Сколько таких же сорочек сошьют из 15 метров ситца?»

Задача 4. «Двум семьям нужно уплатить в месяц за воду 450 рублей. Сколько рублей должна уплатить каждая семья, если в одной семье 5 человек, а в другой 4 человека?»

2. К данной задаче составьте 6 вариантов задач такой же структуры.

«Одна бригада рабочих может построить 18 км шоссейной дороги за 36 дней. Сколько дней ей потребуется для постройки

54 км дороги, если работать они будут с той же производительностью?»

3. Решите задачу разными способами.

«На швейной фабрике мастер сшил одинаковые пальто, израсходовав на них 36 м ткани. Его ученик сшил 2 таких же пальто, израсходовав на них 6 м ткани. Сколько всего пальто сшили мастер и его ученик?»

4. Подберите цепочку заданий для подготовки детей к решению следующей задачи.

Задача. «Из одного пункта одновременно вышли два пешехода и пошли в противоположных направлениях. Один из них шел со скоростью 5 км в час, другой 4 км в час. На каком расстоянии друг от друга они были через 3 часа?»

3.6. Обучение решению задач на движение

План лекции

1. Общее представление о задачах на движение
2. Этапы изучения задач на движение

1. Общее представление о задачах на движение

Одно из распространенных жизненных явлений – движение описывается с помощью трех взаимосвязанных величин: скорость (v), время (t), расстояние (S). Заметим, что в начальных классах рассматривается равномерное движение и предполагается, что путь пройденный объектом движения осуществляется по прямой, в связи с чем, используется термин «расстояние», а не «путь». Зависимость между этой тройкой величин отражена в формуле $S = v \cdot t$, из которой путем несложных математических рассуждений получают две другие формулы: $v = S : t$, $t = S : v$. Из этих формул вытекают правила нахождения неизвестной величины при известных значениях двух других величин. Например:

«чтобы найти скорость движения при равномерном движении, можно пройденное расстояние разделить на время движения» или «чтобы найти время движения, можно пройденное расстояние разделить на скорость движения». Именно этими правилами пользуются дети при выборе действия, с помощью которого решаются простые задачи на движение.

Задачи на движение входят в группу задач на зависимость между величинами. По характеру зависимостей между величинами, по структуре моделей задачи этой группы ничем не отличаются от других задач на тройки взаимосвязанных величин. Однако составные задачи на движение вызывают затруднения у детей, поскольку они обычно дополнительно связаны с различными видами движения (встречное, однонаправленное, вдогонку и т. д.), со временем движения, которое нужно еще вычислить, прежде чем использовать его во взаимосвязи со скоростью и расстоянием. Все это затрудняет процесс понимания и решения задач этого вида. Разумно работу с задачами этого вида построить поэтапно, где каждый этап будет связан с новыми понятиями, видами деятельности и новыми типами задач. Реализация этих этапов осуществляется на протяжении всех лет обучения в начальных классах. Содержание заданий строго соответствует изучаемым вычислительным приемам и формируемым умениям. Рассмотрим последовательно содержание этих этапов.

2. Этапы изучения задач на движение

Первый этап формирования умения решать задачи на движение.

Его основная цель связана с выделением объектов движения, величин, характеризующих явление, введением названия явления, актуализацией известных детям из прошлого опыта слов, связанных с движением. Начать реализацию этого этапа можно с экскурсии к оживленному перекрестку или к месту, где можно наблюдать движение объектов.

Вводимые понятия: объекты движения, расстояние или пройденный путь, скорость, время движения, двигается быстрее, медленнее, догоняет, обгоняет, удаляется, двигается навстречу, в противоположных направлениях, вдогонку.

Экскурсия может быть завершена следующими видами заданий.

1. Дети рисуют перекресток, отмечают объекты и рассказывают, о чем хотели рассказать с помощью рисунка.

2. Рассмотреть картину, где изображен перекресток, и составить рассказ по картине. Для более полного рассказа учитель предлагает использовать слова, которые были введены на экскурсии.

Второй этап: знакомство с моделированием разных видов движения и единицами измерения величин (Таблица 26).

Примеры заданий.

Задание 1. «Ученики вышли из школы и направились домой.» Изобрази на чертеже возможные варианты их движения. (Работаем с чертежом)

Задача 2. «Расстояние между остановками автобусов 2 км. От остановок отошли 2 автобуса, но в пути они остановились. Один из них до момента остановки проехал 320 м, а другой – 380 м. На каком расстоянии друг от друга остановились автобусы?»

Таблица 26

Вводимые понятия, правила	Формируемые умения	Методические решения
Графическая модель разных видов движения Введение единиц измерения величин, описывающих движение	Описать сюжет по готовой модели. Выполнить модель по заданному сюжету. Изменить или выбрать модель в соответствии с заданным условием. Назвать единицы измерения используемой величины.	Основной вид деятельности: работа с моделями, описывающими движение. Методы и приемы: наблюдение, сравнение, показ, моделирование, подводящий диалог, самостоятельная работа. Формы организации деятельности: работа в парах, фронтальная, индивидуальная работа. Принципы: повышение доли самостоятельности в выполнении обобщенных умений решать задачи, описывать ситуации. Виды заданий: перефразирование текстов, конструирование текстов, моделей, выбор, сравнение, преобразование сюжетов, установление соответствий между различными видами моделей движения. Построение и объяснение рисунка по текстам. Создание проблемных ситуаций, требующих схематически изобразить описанный сюжет.

Возможный вариант работы по тексту этой задачи.

Дать два чертежа (на встречное и противоположное движение) и предложить выбрать тот, который подходит к данному тексту. В итоге работы установить, что оба чертежа подходят к тексту, так как в нем не уточнен вид движения. Затем дополнить условие так, чтобы оно соответствовало только первому, затем второму чертежу. Выполнить вычисления для обоих случаев движения.

Задача 3. «Марина и Толя одновременно вышли каждый из своего дома и направились в школу. Через 15 минут они встретились в школе. Сколько минут был в пути Толя? Сколько минут была в пути Марина?»

С помощью таких заданий вводим понятие «время сближения» при встречном движении. Задания такой структуры помогут учащимся осознать характерный признак задач на встречное или противоположно направленное движение: одинаковое время в пути для обоих сближающихся или удаляющихся объектов.

Третий этап: решение задач с использованием значений одной величины (Таблица 27).

Примеры заданий.

Задание 1. Объясните смысл предложений.

– Вертолет летит со скоростью 190 км в ч.
– От города до садового поселка 82 километра.
– Пчела в одну секунду пролетает около 7 метров.
– Велосипедист был в пути 1 час 30 минут.

Задача 2. Пешеход проходит 4 км в ч, а велосипедист проезжает в 3 раза больше. На сколько километров больше за час проезжает велосипедист, чем проходит пешеход? (Работаем с понятием скорость, которая трактуется как расстояние, пройденное за 1 час.)

Таблица 27

Вводимые понятия, правила	Формируемые умения	Методические решения
Использование в речи учащихся слов, указывающих на отношения между значениями одной и той же величины или на отношения между объектами: «меньше», «больше», «быстрее», «медленнее», «такая же», «находиться между», «находиться по разные стороны». Замена словосочетаний математическими терминами. Введение новой формы модели (краткая запись).	Называть величину, используемую в задаче, ее значения и единицы измерения. Преобразовывать единицы измерения величин. Решать простые и составные задачи с использованием значений одной величины. Уметь представлять и описывать, как используемый в задаче сюжет может протекать в реальной жизни и на этой основе предлагать разные способы решения задач. Формирование всех компонентов общего приема решения задач.	Основной вид деятельности: решение, сравнение, преобразование, выбор задач с использованием одной из величин, описывающих движение. Методы и приемы: показ, моделирование, подводящий диалог, самостоятельная работа. Формы организации деятельности: фронтальная или индивидуальная работа, работа в парах или группах. Принципы: от простого к сложному, повышение доли самостоятельности в выполнении обобщенных умений решать задачи. Виды заданий: перефразирование текстов, конструирование текстов, моделей, выбор, сравнение, преобразование текстов задач и других ее моделей. Выполнение всевозможных видов работы над задачей после ее решения.

Задача 3. Пешеход шел со скоростью 4км 200 м в ч. Сколько метров он проходил за 1 минуту? (Преобразуем единицы измерения скорости.)

Задача 4. «Космический корабль летит со скоростью 8 км/с. Сколько километров он пролетит за минуту? Запишите скорость корабля в км/мин, км/ч» (Преобразуем единицы измерения скорости.)

Задача 5. «Из двух городов навстречу друг другу вышли две машины. Одна из них прошла до встречи 328 км, а другая – на 56 км меньше, чем первая. Сделайте рисунок к задаче и узнайте расстояние между двумя городами» (Работаем с понятием «расстояние».)

Задача 6. «Автомашина сначала прошла 320 км, потом половину этого расстояния. После чего ей осталось пройти в 2 раза меньше того, что пройдено. Найдите весь путь». (Полезно выполнить краткую запись, т.е. знаково-символическую модель, а затем, сделать чертеж, соблюдая определенный масштаб.)

Задача 7. «Расстояние между двумя пристанями 280 км. От этих остановок отошли два катера. Один из них прошел 80 км, а другой – в 2 раза больше, чем первый. Каким стало расстояние между катерами?» Следует рассмотреть различные варианты протекания сюжета. В данном случае движение может быть следующих видов: навстречу друг другу, в противоположные стороны, вдогонку (один догоняет другого или движение с отставанием). Иллюстрировать задачу удобно с помощью чертежа.

Задача 8. Из села в 8 ч утра выехал в город фургон с овощами. Через 40 мин фургон остановился на заправку, которая длилась 12 мин, далее до города он ехал 1 ч 20 мин. В какое время фургон приехал в город? (Работаем с величиной «время».) В задаче требуется сложить все временные отрезки, а затем перевести их в другие единицы времени. Затем провести ориентацию по часам и дать ответ на вопрос задачи.

Четвертый этап: решение простых задач на зависимость между величинами.

Примеры заданий.

Задача 1. «Пешеход был в пути 2 часа и прошел за это время 12 км. По сколько километров он проходил в час, если двигался равномерно?» (Формулируем текст задачи, используя названия величин. Получаем задачу: «За два часа, двигаясь равномерно, пешеход прошел расстояние равное 12 км. С какой скоростью двигался пешеход?»)

Задача 2. «Пешеход, двигаясь со скоростью 5 км в час, прошел 15 км. Как долго он был в пути?» (Выделяем величины, используемые в задаче. Находим известные и неизвестные значения величин. Составляем задачи, обратные данной задаче и записываем их в таблицу. Работая с задачей, вводим формулы и записываем их в четвертый столбец таблицы. Формируем умение выводить из одной формулы $S = v \cdot t$ две другие: $v = S : t$; $t = S : v$, опираясь на знание зависимости между компонентами и результатом действия умножения, таблица 28).

Таблица 28

Вводимые понятия, правила	Формируемые умения	Методические решения
Правила нахождения одной величины по значениям двух других Знакомство с формулами равномерного движения, отражающими зависимость между величинами. Таблица – как новая модель записи текста задачи.	Выделять величины, используемые в задаче. Находить известные и неизвестные значения величин. Проводить анализ задач на зависимость между величинами (прямой и обратный). Применять формулы для решения задач. Выводить из одной формулы $S=v \cdot t$ две другие: $v = S : t$; $t = S : v$. Умение записывать текст задачи в таблицу и составлять тексты по данным внесенным в таблицу. Умение составлять задачи на движение, обратные данным задачам. Уметь выявлять и формулировать прямо пропорциональную и обратно пропорциональную зависимость между величинами: скорость, время, расстояние.	Основной вид деятельности: решение задач, наблюдения, построение и преобразование моделей разного вида. Методы и приемы: подводящий диалог, самостоятельная работа. Формы организации деятельности: работа в парах, группах, индивидуальная, фронтальная работа. Создание проблемных ситуаций и организация коллективной работы по ее решению. Принципы: от простого к сложному, повышение доли самостоятельности в выполнении обобщенных умений решать простые задачи на равномерное движение. Виды заданий: на выбор, конструирование, сравнение, преобразование, установление соответствий, чтение и построение графических моделей, дополнение текстов задач и т.д. Запись значений величин в таблицу, составление задач по данным в таблице значениям, в том числе и задач, обратных данной. Составление графических моделей по готовой таблице. Тестирование и коррекция формируемых умений.

Задача 3. Расстояние между двумя городами 180 км. С какой скоростью надо ехать, чтобы преодолеть это расстояние за 1 час, 2 часа, 3 часа, 4часа, 5 часов, 6 часов, t часов?

Задание. Заполните таблицу 29 и запишите формулу зависимости скорости v от времени t.

Таблица 29

t (ч)	1	2	3	4	5	6	t
v(км/ч)							v=180 : t

Вопросы, которые полезно задать после заполнения таблицы:

– У какой величины значение было постоянным?

– Какие значения принимает время движения? Как оно изменяется?

– Как при этом изменяется скорость?

– Какой вывод можно сделать?

Вывод. При постоянном значении расстояния, чем больше время движения, тем меньше скорость.

Задача 4. Какое расстояние пройдет поезд за 5 часов, если будет двигаться со скоростью 70 км/ч; 82 км/ч; 90 км/ч?

Задание. Заполните таблицу и запишите формулу зависимости расстояния от скорости движения. Сделайте вывод.

Задача 5. Сколько времени потребуется велосипедисту, чтобы проехать 240 км, если скорость его движения будет равна 8 км/ч; 10 км/ч; 12 км/ч; 20 км/ч; 24 км/ч; v км/ч?

Задание: заполните таблицу и запишите формулу зависимости времени от скорости движения. Сделайте вывод.

Пятый этап – решение типовых задач на зависимость между величинами скорость, время, расстояние.

В предыдущем параграфе мы подробно рассмотрели решение типовых задач на зависимость между величинами. Решая типовые задачи на движение, следует установить тип задачи на зависимость между величинами (скорость, время, расстояние) и по ее характеристике актуализировать способы решения.

Наиболее простыми для решения являются задачи на нахождение четвертого пропорционального.

Задача 1. Вертолет за 2 часа пролетел 340 км. До пункта назначения ему осталось лететь еще 5 часов, если он будет лететь с той же скоростью. Сколько километров осталось пролететь вертолету до пункта назначения?

Анализируя эту задачу, дети устанавливают, что в ней даны три взаимосвязанные величины, действие разбито на две части (сначала пролетел и потом). Значение одной из величин (скорости) одинаковое в первый и второй раз. Другая величина имеет два значения, а третья только одно. Надо найти второе значение третьей величины.

При решении применяется способ прямого приведения к единице. В процессе фронтальной работы формулируется план решения задачи. Решение учащиеся записывают самостоятельно, выбирая ту форму записи решения, которая им нравиться.

Работая над задачами этого вида, полезно разнообразить приемы работы над задачей, предлагая:

– из множества задач выбрать задачу с такой же характеристикой;

– установить соответствие между текстом задачи и ее решением (при наличии множества текстов и множества решений);

– установить соответствие между текстами и моделями задач, между текстами и планами решения задач;

– выбрать текст задачи, соответствующий данному решению или данному плану решения;

– составить задачу по выражению или графической модели и др.

Разнообразные приемы работы над задачей способствуют формированию логических и познавательных универсальных учебных действий, содействуют становлению общего приема решения задач.

Задачи на пропорциональное движение.

Задача 1. Автотуристы в первый день были в пути 6 ч, а во второй 4 часа. Всего они проехали 600 км. Какое расстояние проезжали туристы каждый день, если они ехали с одинаковой скоростью?

Работа над задачей.

Дать (построить вместе с учащимися) вспомогательную модель задачи в виде рисунка или чертежа.

Анализ рисунка подводит к решению задачи:

1) $4 + 6 = 10$ (ч) – время в пути за 2 дня;
2) $600 : 10 = 60$ (км/ч) – скорость передвижения;
3) $60 \cdot 6 = 360$ (км) – расстояние, пройденное в 1 день;
4) $60 \cdot 4 = 240$ (км) – расстояние, пройденное во 2 день.

Задача 2. Теплоход в течение 2 дней был в пути 15 ч. В первый день он прошел 200 км, а во второй день 175 км. Сколько часов теплоход был в пути каждый день, если он шел с одинаковой скоростью?

Работа над задачей.

Установить, что общее количество пройденных за два дня километров распределяется пропорционально затраченному времени – 15 ч. Эта особенность задачи будет хорошо видна учащимся, если построить ее табличную модель и дать характеристику этой задаче, либо выполнить чертеж как в предыдущей задаче.

Решение:

1) $200 + 175 = 375$ (км) – за 2 дня;
2) $375 : 15 = 25$ (км/ч) – скорость движения;
3) $200 : 25 = 8$ (ч) – время движения в 1-ый день;

4) 175 : 25 = 7 (ч) – время движения во 2-ой день.

Задачи на нахождение числа по двум разностям

Задачи на нахождение неизвестного по двум разностям появляются в конце 4 класса.

Задача 3. Два самолета летели с одинаковой скоростью. Один самолет был в воздухе 4 часа, другой - 6 часов. Первый самолет пролетел меньше второго на 1400 км. Какое расстояние пролетел каждый самолет?

Для тех детей, которые затрудняются в решении данной задачи, уместно использовать вспомогательную задачу.

Задача 3 (вспомогательная). За 2 часа самолет пролетел 1400 км. С какой средней скоростью летел самолет?

При работе над типовыми задачами на зависимость между величинами, описывающими движение, полезно выяснять, сколько разнообразных вариантов задач такого вида может быть и составлять названные варианты задач (см. предыдущий параграф).

Шестой этап: введение понятий «скорость сближения» и «скорость удаления» (Таблица 30)

Примеры заданий. Отрабатываем понятие «средняя скорость».

Задача 1. Велосипедист ехал 2 ч со средней скоростью 7 км/ч, затем он увеличил скорость и 3 часа ехал со средней скоростью 12 км/ч. Какое расстояние он проехал за это время? Узнай среднюю скорость его движения на всем пути.

Отрабатываем понятие «средняя скорость**»**. При появлении трудностей для осознания понятия «средняя скорость» задаем вспомогательные вопросы, выделяя среднюю скорость на каждом отрезке пути.

(7 км/ч + 7км/ч) : 2 = 7 км/ч – средняя скорость на первом участке пути.

Таблица30

Вводимые понятия, правила	Формируемые умения	Методические решения
Введение понятий: «средняя скорость», «скорость сближения» и «скорость удаления» *Средняя скорость* – это среднее арифметическое нескольких значений скорости. Скорость сближения – это сумма скоростей двух объектов при одновременном движении навстречу друг другу, и разность скоростей при однонаправленном движении. Скорость удаления – это сумма скоростей двух объектов при одновременном движении в противоположные стороны.	Моделирование, выбор, конструирование, сравнение, преобразование и решение задач на движение, составление плана решения задачи, блок-схем, отражающих решение задачи. Прямой и обратный анализ задач	*Основной вид деятельности*: наблюдение и демонстрация видов движения, построение и преобразование моделей задач *разного* вида, решение и преобразование текстов задач, обобщение по результатам исследования решения задач. *Методы и приемы*: практическая работа по демонстрации явления, наблюдение. Для решения составных задач используем прием решения вспомогательных задач, моделирование явления с *заданными* параметрами в виде чертежа и в виде таблицы, подводящий диалог, самостоятельная работа. *Формы* организации деятельности: фронтальная работа, работа в парах, индивидуальная работа. *Принципы:* от простого к сложному, повышение доли самостоятельности в выполнении обобщенных умений решать составные задачи на равномерное движение. *Виды заданий*: конструирование, выбор, сравнение, преобразование, установление соответствий, чтение графических моделей, дополнение текстов и т.д. установление зависимостей, дифференцированные формы заданий.

В процессе разбора текста и вычленения логически законченной части задачи целесообразно составить графическую модель.

Опираясь на чертеж, легко составить к этой задаче выражение $(7 \cdot 2 + 12 \cdot 3)$.

Понятие «средняя скорость» полезно отрабатывать на составных задачах, ставя этот вопрос как дополнительный к уже решенной задаче.

Например.

Задача 2. Туристы прошли по реке на байдарках половину намеченного пути и еще 12 км. Оставшийся путь они могут пройти на байдарках за 2 ч со скоростью 7 км/ч. Узнайте весь путь, который должны были пройти туристы на байдарках.

Задача не вызовет затруднений, если составить по тексту задачи графическую модель. Исследуя решение задачи, задаем дополнительные вопросы.

– Какова средняя скорость движения туристов на всем пути?

– Почему мы не можем ответить на этот вопрос?

– Какова средняя скорость движения туристов на байдарках?

Отрабатываем понятие «средняя скорость» при «встречном движении».

Задача 3. Из двух пунктов навстречу друг другу вышли два пешехода. Каково расстояние между пунктами, если пешеходы шли со скоростью один 4км в ч, а другой – 5 км в ч, и через 3 часа они встретились?

Графическая модель приводит учеников к двум способам решения.

1 способ:

1) $4 \cdot 3 = 12$ (км);

2) $5 \cdot 3 = 15$ (км);

3) $12 + 15 = 27$ (км).

2 способ:

1) $4 + 5 = 9$ (км/ч);

2) $9 \cdot 3 = 27$(км).

При решении задачи вторым способом можно ввести термин «скорость сближения», разъяснив его на графической модели. При этом учитель может одновременно сдвигать фигурки пешеходов навстречу друг другу, каждый раз на одно деление, что означает, что прошли 1 час пути.

$4 + 5 = 9$ (км/ч) – на столько пешеходы сблизились за 1 час.

Следует обратить внимание детей на то, что складываются значения скорости, поэтому в ответе тоже получается скорость. Если за 1 час пешеходы сблизились на 11 км, то за 4 часа они сблизятся на $(11 \cdot 4)$ км.

Задача 4. Расстояние между городом А и городом В 420 км. Из города А в город В выехал автобус со средней скоростью 60 км/ч. В это же время навстречу ему из города В в город А по той же дороге выехало такси со средней скоростью 80 км/ч. На каком расстоянии от города В они встретятся?

К задаче полезно сделать чертеж. Удобно провести смешанный тип анализа задачи, начиная его от данных задачи.

– Что можно узнать, зная, что автобус и такси двигались навстречу друг другу со скоростью 60 км/ч и 80 км/ч? (Скорость сближения.)

– Как найти время, через которое они встретятся? (Расстояние разделить на скорость.)

$420 : 140 = 3$ (ч) – через 3 часа они встретятся.

– Какое расстояние пройдет за это время такси?

$80 \cdot 3 = 240$ (км) – на таком расстоянии от города В они встретятся.

– Кто готов сказать план решения задачи?

Далее даем задачу более трудную, где нахождение скорости сближения поможет найти решение задачи.

Задача № 3. Из двух городов, расстояние между которыми 1200 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Один из них проходит это расстояние за 20 ч, другой – за 30 ч. Через сколько часов поезда встретятся? (Некоторым детям можно предложить вспомогательные карточки с планом решения этой задачи.)

Отрабатываем понятие «скорость сближения» при однонаправленном движении.

Этот вид движения рассматривается только в 4 классе и далеко не во всех программах. Для понимания этого вида движения и нахождения средней скорости при однонаправленном движении необходимо неоднократно демонстрировать это движение на действующей модели, где объекты двигаются то в одну сторону, вслед друг за другом, то в другую.

Продолжая демонстрировать этот вид движения на модели полезно решать задачи следующих типов.

Задача 1. На каком расстоянии друг от друга будут два велосипедиста через час, если они выехали одновременно в одном направлении, и скорость первого велосипедиста равна 10 км/ч, а второго 12 км/ч?

Усложняем задачу, указывая разное время от начала движения.

Задача 2. На каком расстоянии друг от друга будут два велосипедиста в момент выезда второго велосипедиста, если они выехали в разное время, но в одну сторону. Первый выехал на 2 часа раньше второго и скорость первого велосипедиста равна 10 км/ч, а второго 12 км/ч?

Задаем дополнительные вопросы.

– Догонит ли второй велосипедист первого?
– Через какое время?

– Какое решение имела бы эта задача, если бы второй велосипедист выехал раньше первого на 2 часа?

Такие же преобразования проводим, решая ниже данные задачи.

Задача 3. В 8 часов утра из пункта А в пункт В вышел мотоциклист со скоростью 32 км в час, а в 11 часов утра в том же направлении вышел грузовик из пункта А со скоростью 56 км в час. Через сколько часов грузовик догонит мотоциклиста?

Задача 4. Расстояние между пунктами А и В 520 км. В 8 часов утра из пункта А в пункт В вышел мотоциклист со скоростью 32 км в час, а в 11 часов утра в том же направлении вышел грузовик из пункта А со скоростью 56 км в час. На каком расстоянии от пункта А грузовик догонит мотоциклиста?

Задача 5. От одной пристани одновременно отошли две моторные лодки в противоположных направлениях. Одна шла со средней скоростью 250 м/мин, а другая – 200 м/мин. На каком расстоянии друг от друга будут лодки через 40 мин?

Через задачи типичные задаче № 5 отрабатываем понятие «скорость удаления» при разнонаправленном движении.

Вопросы для самопроверки

1. Назовите цель каждого этапа обучения решению задач на движение.

2. Перечислите понятия, вводимые на каждом этапе.

3. Наблюдается ли преемственность в формировании умений, связанных с решением задач на зависимость между величинами? Дайте обоснование своему ответу.

4. Какие задачи на зависимость между величинами, характеризующими движение, относятся к типовым задачам на зависимость между величинами?

5. Назовите способы решения задач на нахождение четвертого пропорционального, которые вам известны. Приведите

примеры задач, которые могут быть решены каждым из этих способов.

6. Какие методические приемы полезно использовать при формировании умения решать задачи на движение? Способствуют ли эти приемы формированию общего умения решать задачи? Дайте обоснование своему ответу.

Задания для самоподготовки

1. Решите задачу и найдите способ объяснения ее решения.

Задача. Собака погналась за лисицей, которая была от нее на расстоянии 30 м. Скачок собаки 2 м, скачок лисицы 1 м. В то время как лисица делает 3 скачка, собака делает только 2 скачка. Догонит ли собака лисицу? Сколько скачков она должна сделать для этого? Какое расстояние пробежит собака?

2. Какие виды моделей помогут выполнить решение этой задачи?

Задача. Мотоциклист находился в пути два дня. В первый день за 7 часов он проехал 525 км. Чтобы пройти намеченное расстояние ему пришлось во второй день уменьшить время пребывания в пути до 5 часов, увеличив скорость движения на 9 км/ч. Какое расстояние проехал мотоциклист за 2 дня?

3. Составьте проверочную работу по результатам четвертого и пятого этапов обучения решению задач на движение. Составьте таблицу, выделив умения, сформированность которых вы будете проверять с помощью этой проверочной работы.

4. Составьте систему заданий, с помощью которых вы будете знакомить детей с зависимостью между скоростью и пройденным расстоянием при постоянном времени; между временем и пройденным расстоянием при постоянной скорости и др.

5. Выполните анализ учебников по математике для начальных классов с целью установления видов и количества упражнений, отводимых на реализацию каждого этапа обучения решению задач на движение.

Литература

1. Абашуева, З.М. Технология обучения студентов решению текстовых задач на пропорциональную зависимость. [Текст] / З.М. Абашуева // Начальная школа. – 2003. – № 10.

2. Азимов, Э.Г. Словарь методических терминов [Текст] / Э.Г. Азимов, А.И. Щукина. – СПб. : Златоуст, 2002.

3. Актуальные проблемы методики обучения математике в начальных классах [Текст] // под ред. М.И. Моро, А.М. Пышкало. – М., 1977.

4. Александрова, Э.И. Методика преподавания. Математика. [Текст] / Э.И. Александрова // Вестник образования. – М. : Сентябрь 18. – 2000.

5. Александрова, Э.И. Особенности формирования навыков при обучении математике по системе Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова. [Текст] / Э.И. Александрова // Начальная школа. – 2005. – № 3.

6. Амонашвили, Ш.А. Здравствуйте – дети! [Текст] / Ш.А. Амонашвили. – М., 1997.

7. Артемов, А.К. Формирование обобщенных умений решать задачи [Текст] / А.К. Артемов // Начальная школа. – 1992. – №2

8. Асмолов, А.Г. Психология личности: культурно-историческое понимание развития человека / А.Г. Асмолов. – М., 2007.

9. Ахметгалиева, А.А. Развитие математической памяти у младшего школьника. [Текст] / А.А. Ахметгалиева // Начальная школа. – 2005. – № 6.

10. Бантова, М.А. Методика начального обучения математике. [Текст] / М.А. Бантова, Г.В. Бельтюкова. – М. : Просвещение, 1984.

11. Башмаков, М.И. Программа курса «Математика» 1-4 классы. [Электронный ресурс] / М.И. Башмаков, М.Г. Нефедова. – Режим доступа : http://nsportal.ru/nachalnaya-shkola/matematika/ 2012/04/ 11/ rabochaya-programma-po-matematike-umk-planeta-znaniy-1-4.

12. Белошистая, А.В. Методика обучения математике в начальной школе : курс лекций : учебное пособие для студентов высш. пед. учеб. заведений [Текст] / А.В. Белошистая. – М. : Гуманитар. изд. Центр ВЛАДОС, 2005.

13. Белошистая, А.В. Моделирование как основа формирования умения решать задачи. [Текст] / А.В. Белошистая. – Мурманск, 1990.

14. Белошистая, А.В. Обучение решению задач в начальной школе : книга для учителя [Текст] / А.В. Белошистая, – М. : «ТИД «Русское слово - РС»», 2003.

15. Богоявленский, Д.Н. Психология усвоения знаний в школе. [Текст] / Д.Н. Богоявленский. – М., 1974.

16. Боданский, Ф.Г. Развитие математического мышления у младших школьников [Текст] / Ф.Г. Боданский // Развитие психики школьников в процессе учебной деятельности : сб. науч. трудов. – М., 1983. – С. 115-125.

17. Буланова, М.В. Педагогические технологии. [Текст] / М.В. Буланова, В.А. Топоркова. – М. ; Ростов н/Дону, 2004.

18. Вавренчук, Н.А. Спецкурс «Формирование математической речи младших школьников» в системе профессиональной подготовки учителей начальных классов [Текст] : сб. материалов Междунар. науч.- практ. конф., Брест, 15-17 мая 2007 г. / Н.А. Вавренчук // Методология, теория и практика естественно-математического и педагогического образования. – Брест : Изд-во БрГУ, 2007.

19. Виноградова, М.Д. Коллективная познавательная деятельность и воспитание школьников. [Текст] / М.Д. Виноградова, К.Б. Первин. – М. : Просвещение, 1977.

20. Воронцов, А.Б. Педагогические технологии контроля и оценки учебной деятельности (система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова) [Текст] / А.Б. Воронцов. – М. : Издатель Рассказов А.И., 2002.

21. Выбор методов обучения в средней школе [Текст] / под ред. Ю.К. Бабанского. – М. : Педагогика, 1981.

22. Гальперин, П.Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий [Текст] / П.Я. Гальперин // Исследования мышления в советской психологии. – М., 1969.

23. Гальперин, П.Я. Формирование умственных действий. [Текст] / П.Я. Гальперин // Хрестоматия по общей психологии: психология мышления – М., 2001.

24. Гребенюк, О.С. Теория обучения [Текст] / О.С. Гребенюк, Т.Б. Гребенюк. – М., 2003.

25. Гузеев, В.В. Образовательная технология: от приема до философии [Текст] / В.В. Гузеев. – М.: Сентябрь, 1996.

26. Давыдов, В.В. Младший школьник как субъект учебной деятельности. [Текст] / В.В. Давыдов, В.И. Слободчиков, Г.А. Цукерман // Вопросы психологии. – 2002. – № 3-4.

27. Давыдов, В.В. Теория развивающего обучения [Текст] / В.В. Давыдов. – М., 1997.

28. Давыдов, В.В. Формирование учебной деятельности школьников. [Текст] / В.В. Давыдов. – М., 1982.

29. Дрозд, В.А. Методика начального обучения математике [Текст] / В.А. Дрозд. – Минск : Всетка, 2007.

30. Дьяченко, В.К. Сотрудничество в обучении. [Текст] / В.К. Дьяченко. − М. : Просвещение, 1991.

31. Зайцева, С.А. Методика обучения математике в начальной школе [Текст] / С.А. Зайцева, И.Б. Румянцева, И.И. Целищева. – М. : Гуманитар. ИЦ ВЛАДОС, 2008.

32. Занков, Л.В. Обучение и развитие (экспериментально-педагогическое исследование) [Текст] / Л.В. Занков // Избранные педагогические труды. – М., 1990.

33. Занков, Л.В. Развитие школьников в процессе обучения. [Текст] / Л.В. Занков. – М., 2007.

34. Зинченко, В.П. Психологические основы педагогики: психолого-педагогические основы построения системы развивающего обучения Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова [Текст] / В.П. Зинченко. – М., 2002.

35. Игнатова, Л.В. Приемы установления зависимости между величинами в задачах. [Текст] / Л.В. Игнатова // Начальная школа. – 1988. – № 2.

36. Истомина, Н.Б. Методика обучения математике в начальных классах : учебное пособие для студентов ф-тов подготовки учителей нач. кл. пед. ин-тов, колледжей и училищ [Текст] / Н.Б. Истомина. – М. : ЛИНКА-ПРЕСС, 1997.

37. Истомина, Н.Б. Обучение решению задач. [Текст] / Н.Б. Истомина // Начальная школа. – 1985. – № 1.

38. Истомина, Н.Б. Работа над составной задачей. [Текст] / Н.Б. Истомина // Начальная школа. – 1988. – №2.

39. Как проектировать универсальные учебные действия в начальной школе: от действия к мысли: пособие для учителя [Текст] / А.Г. Асмолов, Г.В. Бурменская, И.А. Володарская [и др.] ; под ред. А.Г. Асмолова. – М. : Просвещение, 2008.

40. Калинина, Г.П. Развитие математической речи в начальных классах. [Текст] / Г.П. Калинина, В.П. Ручкина // Специальное образование – 2016. – № 1(41). – С. 62-74.

41. Калинина, Г.П. Формирование общего приема решения задач. [Текст] / Г.П. Калинина, В.П. Ручкина // Специальное образование – 2015. – № 3(39). – С. 35-45.

42. Калинина, Н.В. Учебная самостоятельность младшего школьника: диагностика и развитие [Текст] : практическое пособие. / Н.В. Калинина, С.Ю. Прохорова. – М. : АРКТИ, 2008.

43. Козлова, С.А. Развитие мышления детей 4-6 лет на основе формирования приемов анализа текста и вспомогательной графической модели текстов задачи. [Текст] / С.А. Козлова // Начальная школа плюс До и После. – 2009. – № 8.

44. Концепция развития математического образования в РФ: [Электронный ресурс] – Режим доступа : http://matematik-shool.ucoz.ru/81743.pdf.

45. Кубышева, М.А. Реализация технологии деятельностного метода на уроках разной целевой направленности. [Текст] / М.А. Кубышева. – М. : УМЦ «Школа 2000…», 2005.

46. Кукушин, В.С. Дидактика (теория обучения) [Текст] / В.С. Кукушин. – М. ; Ростов н/Дону, 2003.

47. Кукушин, В.С. Теория и методика воспитательной работы [Текст] / В.С. Кукушин. – Ростов н/Дону, 2002.

48. Математика для каждого. Концепции, программы, опыт работы. – М. : Баллас, 2000.

49. Методика воспитательной работы. [Текст] / под ред. В.А. Сластенина – М., 2002.

50. Микулина, Г.Г. Учим понимать математику. / Г.Г. Микулина. – М., 1995.

51. Назарова, И.И. Ознакомление с функциональной зависимостью при обучении решению задач. [Текст] / И.И. Назарова // Начальная школа. – 1989. – № 1.

52. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования. [Текст] / под ред. Е.С. Полат. – М., 2003.

53. Образовательная система «Школа 2100» – качественное образование для всех. [Текст] : сборник материалов / под научной ред. Д.И. Фельдштейна. – М.: Баласс, 2006.

54. Образовательные технологии. : сборник материалов. (Образовательная система «школа2100») – М.: Баласс, 2008.

55. Обучение младших школьников решению текстовых задач. [Текст] : сборник статей. / сост. Н.Б. Истомина, Г.Г. Шмырева – Смоленск : Ассоциация 21 век, 2005.

56. Орлов, В.И. Дидактический метод и педагогическая технология. [Текст] / В.И. Орлов // Школьные технологии. – 2009. – №6.

57. Оценка достижения планируемых результатов в начальной школе. Система заданий. [Текст] В 2 ч. Ч. 1/ М.Ю. Демидова, С.В. Иванов, О.А. Карабанова [и др.] ; под ред. Г.С. Ковалевой, О.Б. Логиновой. – М. : Просвещение, 2010.

58. Петерсон, Л.Г. Теория и практика построения непрерывного образования. [Текст] / Л.Г. Петерсон. – М. : УМЦ «Школа 2000…», 2001.

59. Подласый, И.П. Педагогика [Текст]. / И.П. Подласый. – М., 1999.

60. Поливанова, К.Н. Проектная деятельность школьников [Текст] : пособие для учителя / К.Н. Поливанова, – М.: Просвещение, 2008.

61. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Начальная школа [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://school-russia.prosv.ru/info.aspx?ob_no =25561.

62. Примерные программы по учебным предметам. Начальная школа. В 2 ч. Ч.1 [Текст]. – М. : Просвещение, 2010.

63. Программа «Перспективная начальная школа» [Электронный ресурс] – Режим доступа : http://schoolguide.ru/index.php/progs/archive/perspekt.html.

64. Проектные задачи в начальной школе [Текст] : пособие для учителя / А.Б. Воронцов, В.М. Заславский, С.В. Егоркина [и др.] ; под ред. А.Б. Воронцова. – М. : Просвещение, 2010.

65. Психологическая теория деятельности: вчера, сегодня, завтра. [Текст] / под ред. А.А. Леонтьева. – М., 2006.

66. Репкин, В.В. Развивающее обучение: Теория и практика [Текст] / В.В. Репкин, Н.В. Репкина. – Томск : Пеленг, 1997.

67. Репкина, Г.В. Оценка уровня сформированности учебной деятельности [Текст] / Г.В. Репкина, Е.В. Заика. – Томск : Пеленг, 1993.

68. Ручкина, В.П. Дифференцированные задания по математике для начальных классов [Текст] / В.П. Ручкина. – Екатеринбург : Изд-во УрГПУ, 2002.

69. Ручкина, В.П. К вопросу о развитии математической речи учащихся начальной школы [Текст] / В.П. Ручкина, Н.А. Шпортеева // Матер. междунар. пед. чтений «Образование и детство XXI века» – Екатеринбург: УГППУ, 2004.

70. Ручкина, В.П. Курс лекций по методике обучения математике в начальных классах. [Текст] : учебное пособие. / В.П. Ручкина, Г.П. Калинина, Г.В. Воробьева. – Екатеринбург : Издатель Калинина Г.П., 2009.

71. Ручкина, В.П. Методика математики в начальных классах [Текст] : учебное пособие / В.П. Ручкина, Л.В. Воронина. – Екатеринбург : Издатель Калинина Г.П., 2008.

72. Ручкина, В.П. Различные подходы к формированию умений решать задачи [Текст] / В.П. Ручкина, Г.П. Калинина // Педагогические системы развития творчества: материалы 8-й

Междунар. науч.-практ. конф. 21-23 дек. 2009 г., Екатеринбург: в 3-х ч., Ч.3.– Екатеринбург : Издатель Калинина Г.П., 2010.

73. Ручкина, В.П. Решение задач алгебраическим методом [Текст] / В.П. Ручкина, Н.Н. Стенина // Педагогические системы развития творчества: материалы 8-й Междунар. науч.-практ. конф. 21-23 дек. 2009 г., Екатеринбург: в 3-х ч. Ч.1. – Екатеринбург : Издатель Калинина Г.П., 2009.

74. Ручкина, В.П. Формирование общего приема решения задач средствами математики. [Текст] / В.П. Ручкина // Современные проблемы математического образования в период детства: коллективная монография / [В.В. Артемьева и др.] под общ. ред. проф. Л. В. Ворониной. – Екатеринбург: ФГБОУ ВПО УрГПУ, 2015.

75. Саранцев, Г.И. Упражнения в обучении математике. практика [Текст] / Г.И. Саранцев. – М., 1995.

76. Селевко, Г.К. Современные образовательные технологии : учебное пособие. [Текст] / Г.К. Селевко. – М. : Народное образование, 1998.

77. Семенов, Е.М. Обучение решению задач на сложение и вычитание. [Текст] / Е.М. Семенов, Т.П. Трошкова. – Свердловск, 1991.

78. Скаткин, Л.Н. Обучение решению простых и составных арифметических задач. [Текст] / Л.Н. Скаткин. – М. : Учпедгиз, 1963.

79. Сластенин, В.А. Педагогика [Текст] / В.А. Сластенин. – М., 2002.

80. Смолеусова, Т.В. Этапы, методы и способы решения задачи [Текст] / Т.В. Смолеусова // Начальная школа. – 2003. – № 12.

81. Современный словарь по педагогике [Текст] / сост. Рапацевич Е.С. – Мн. : Современное слово, 2001.

82. Современные средства обучения математике : [Электронный ресурс] – Режим доступа : http://edubrends.ru/ primaryschool.html.

83. Средства обучения и методика их использования в начальной школе [Текст] / под ред. Г.Ф. Суворовой. – М. : Просвещение, 1990.

84. Средства обучения математике [Текст] / под ред. А.М. Пышкало, М.И. Моро. – М. : Просвещение, 1986.

85. Средства обучения математике : [Электронный ресурс] – Режим доступа : http://mudryj-gnom.3dn.ru/blog/ sredstva_ obuchenija_matematike_v_nachalnykh_klassakh/2014-01-04-10.

86. Стойлова, Л.П. Математика [Текст] : учеб. пособие для студентов сред. пед. учеб. заведений. / Л.П. Стойлова. – М. : ИЦ «Академия», 1998.

87. Строкова, Т.А. Компетентностный подход и проблемы его реализации. [Текст] / Т.А. Строкова // Школьные технологии. – 2009. – №6. – С.9-16.

88. Талызина, Н.Ф. Формирование общих приёмов решения арифметических задач [Текст] / Н.Ф. Талызина // Формирование приёмов математического мышления – М. : ТОО «Вентана - Граф», 1995.

89. Талызина, Н.Ф. Формирование познавательной деятельности младших школьников [Текст] / Н.Ф. Талызина. − М., 1987.

90. Теоретические и методические основы изучения математики в начальной школе [Текст] / А.В. Тихоненко, [и др.] ; под ред. проф. А.В. Тихоненко.– Ростов н/Д : Феникс, 2008.

91. Тихоненко, А.В. Технология изучения понятия величины на уроках математики в начальной школе [Текст] / А.В. Тихоненко. – Ростов н/Д.: Феникс, 2006.

92. Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования. [Текст] – М.: Просвещение, 2010.

93. Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи [Текст] / Л.М. Фридман – М. : Просвещение, 1984.

94. Фридман, Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. [Текст] / Л.М. Фридман. – М., 1983.

95. Фройденталь, Г. Математика как педагогическая задача. [Текст] : пособие для учителей – В 2 ч. Ч. 1. / Г. Фройденталь ; под ред. Н.Я. Виленкина. – М., 1982.

96. Харламов, И.Ф. Педагогика. [Текст] / И.Ф. Харламов. – М., 2004.

97. Царева, С.Е. Виды работы с задачами на уроке математики [Текст] / С.Е. Царева // Начальная школа. – 1990. – № 10.

98. Царева, С.Е. Методика обучения решению задач [Текст] / С.Е. Царева // Начальная школа. – 1998. – № 1.

99. Цукерман, Г.А. Оценка без отметки [Текст] / Г.А. Цукерман, [и др.] – М.: Рига, 1999.

100. Шадрина, И.В. Обучение математике в начальных классах [Текст] : пособие для учителей, родителей, студентов педвузов. / И.В. Шадрина. – М. : Школьная Пресса, 2003.

101. Шевкин, А.В. Обучение решению текстовых задач в 5-6 классах. [Текст] / А.В. Шевкин. – М. : Русское слово, 2002.

102. Шевкин, А.В. Текстовые задачи в школьном курсе математики [Текст] / А.В. Шевкин // Математика. – 2005. – №17-20.

103. Шикова, Р.Н. Особенности работы над задачами по системе развивающего обучения Л.В. Занкова. [Текст] / Р.Н. Шикова // Начальная школа. – 1999. – №4.

104. Шикова, Р.Н. Работа над текстовыми задачами. [Текст] / Р.Н. Шикова // Начальная школа. – 1995. – № 5.

105. Шикова, Р.Н. Способы разбора текстовых задач. [Текст] / Р.Н. Шикова // Начальная школа. – 1986. – № 12.

106. «Школа 2000 ..». Деятельностный метод обучения: модель. [Текст] / под науч. ред. Г.В. Дорофеева. Вып. 3. – М. : УМЦ «Школа 2000», 2000.

107. «Школа 2000…». Математика для каждого: концепция, программы, опыт работы [Текст] / под науч. ред. Г.В. Дорофеева. Вып. 3. – М. : УМЦ «Школа 2000», 2000.

108. Якиманская, И.С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе. [Текст] / И.С. Якиманская. – М., 1996.

109. Ясюкова, Л.А. Особенности развития детей в зависимости от программ обучения [Текст] / Л.А. Ясюкова // Практическая психология. – СПб., 1998.

Учебное издание

Валентина Павловна Ручкина

Курс лекций по теории и технологии обучения математике в начальных классах

Компьютерный набор: В.П. Ручкина
Редактирование: Г.П. Калинина
Макетирование: Г.П. Калинина
Корректура: Г.П. Калинина

Подписано в печать . Формат 60х84х1/16
Гарнитура «Times». Бумага для множ. апп. Печать ризограф.
Усл. печ. 13,0 п.л. Тираж 500 экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета в ФГБОУ ВО
«Уральский государственный педагогический университет»
Отдел множительных систем
Адрес: 620017, г. Екатеринбург, пр. Космонавтов, 26